MEMORIE

DELL'I. R. ISTITUTO VENETO

DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

MEMORIE

DELL'I. R. ISTITUTO VENETO

DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

VOLUME TERZO

VENEZIA
PRESSO LA SEGRETERIA DELL'I. R. ISTITUTO
NEL PALAZZO DUCALE
1847

COI TIPI DEL SEMINARIO DI PADOVA

AVVERTIMENTO

In esecuzione dell' Articolo 134 degli Statuti Interni, si dichiara che ogni Autore è particolarmente responsabile delle opinioni e dei fatti esposti ne' proprii scritti.

ELENCO

DEI

MEMBRI ATTUALI DELL' I. R. ISTITUTO VENETO

DI

SCIENZE, LETTERE ED ARTI

1.^{mo} *Luglio* 1847

PRESIDENTE

S. E. il sig. conte Andrea Cittadella Vigodarzere, Cav. dei Gioanniti, Consigliere intimo e Ciambellano di S. M. I. R., Consigliere straordinario dell' I. R. Accademia di Belle Arti in Venezia, Membro effettivo dell' I. R. Accademia delle scienze di Vienna, Membro onorario dell' I. R. Istituto e di varie altre Accademie.

VICE PRESIDENTE

Menin ab. Lodovico, Direttore della Facoltà filosofica e Professore di Storia nell' I. R. Università di Padova, Socio di varie Accademie.

SEGRETARIO

Pasini Lodovico.

VICE SEGRETARIO

Carrer dott. Luigi, Preposto al Civico Museo Correr.

MEMBRI ONORARJ

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Francesco Carlo Giuseppe, Principe Imperiale, Principe Reale d'Ungheria e di Boemia, ec., Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine Reale di s. Stefano d'Ungheria, ec.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Giovanni Battista Giuseppe Fabiano Sebastiano, Principe Imperiale, Principe Reale d'Ungheria e di Boemia, ec, Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine militare di Maria Teresa e dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, ec.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Ranieri Giuseppe Giovanni Michele Francesco Girolamo, Principe Imperiale, Principe Reale d'Ungheria e di Boemia, ec., Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine Reale di s. Stefano d'Ungheria e dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, Cav. di prima classe dell'Ordine Imperiale Austriaco della Corona di ferro (in brillanti), e del R. Ordine Sardo dell'Annunziata, Vice Re del Regno Lombardo Veneto, ec.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Luigi Giuseppe Antonio, Principe Imperiale, Principe Reale d'Ungheria e di Boemia, ec., Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine Reale di s. Stefano d'Ungheria, ec.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria Federico Ferdinando Leopoldo, Principe Imperiale, Principe Reale d'Ungheria e di Boemia, ec., Cav. del Toson d'oro e dell'Ordine militare di Maria Teresa, Cav. di prima classe degli ordini I. I. russi di s. Andrea, di s. Alessandro Newsky, dell'Aquila bianca e di s. Anna e di s. Giorgio di quarta classe, Cav. del R. Ordine militare prussiano del Merito e di quello R. britannico del Bagno, ec.

S. A. S. il Principe Clemente Venceslao di Metternich-Winneburg, ec., Grande di Spagna di prima classe, Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine Reale di s. Stefano d'Ungheria (in brillanti), Croce d'oro dell'Ordine civile, I. R. Consigliere intimo, Cancelliere della Casa, della Corte e dello Stato, ec., Ministro di Stato e delle Conferenze, ec.

S. E. il signor conte Francesco Antonio di Kolowrat Liebsteinsky, Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, Croce d'oro dell'onor civile, Balio Onorario e Gran Croce dell'Ordine sovrano di s. Giovanni di Gerusalemme, I. R. Consigliere intimo, Ministro di Stato e delle Conferenze, ec.

S. E. il signor conte Carlo d'Inzaghi, Gran Croce dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo,

e dell'Ordine Costantiniano di s. Giorgio di Parma, I. R. Consigliere intimo, I. R. Ciambellano, ec., Gran Cancelliere e Presidente dell' I. R. Commissione Aulica degli studii.

S. E. il signor conte Carlo Federico di Kübeck e Kübau, Cav. del R. Ordine di s. Stefano d'Ungheria, Gran Croce dell'Ordine R. bavaro di s. Michele, Cav. di seconda classe dell'Ordine I. russo di s. Stanislao, ec., I. R. Consigliere intimo, Presidente dell' I. R. Camera Aulica generale e dell' I. R. Camera Aulica per le zecche e per le miniere.

S. Eminenza Reverendissima Jacopo Monico, Cardinale della S. R. C., Cav. di prima classe dell'Ordine Imperiale Austriaco della Corona di Ferro, I. R. Consigliere intimo, Cappellano della Corona, ec., Patriarca di Venezia.

S. E. il signor conte Luigi Palffy di Erdöd, Cav. dell'Ordine de' Gioanniti, Cav. dell'Ordine russo dell'Aquila bianca, dell'Ordine pontificio di Cristo, I. R. Consigliere intimo attuale di Stato, I. R. Ciambellano, ec., Governatore delle Provincie Venete.

S. E. il signor conte Giovanni Battista di Spaur, Gran Croce dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, Cav. di prima classe dell'Ordine Imperiale Austriaco della Corona di Ferro, ec., I. R. Consigliere intimo, Ciambellano, ec., Governatore delle Provincie Lombarde.

S. E. monsignor Gio. Battista Ladislao Pyrker di Felsö-Eör, Cav. di prima classe dell'Ordine Imperiale Austriaco della Corona di Ferro, I. R. Consigliere intimo, ec., Patriarca Arcivescovo di Erlau.

S. E. il signor barone Francesco di Galvagna, Cav. di seconda classe dell'Ordine Imperiale Austriaco della Corona di Ferro, Commendatore dell'Ordine pontificio di s. Gregorio il Grande, I. R. Consigliere intimo, ec., Presidente dell' I. R. Accademia di Belle Arti in Venezia.

S. E. il signor conte Andrea Cittadella Vigodarzere, *come sopra*.

Di Sebregondi nobile Giuseppe conte e patrizio romano, Cav. dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, Gran Croce dell'Ordine pontificio di s. Gregorio il Grande, Cav. dell'Ordine dei Gioanniti e di quello pontificio di Cristo (in brillanti), Vice Presidente dell' I. R. Governo, Socio di parecchie Accademie.

Hallaschka Francesco Cassiano, I. R. Consigliere Aulico, Assessore dell'Eccelsa Aulica Commissione degli studii, Presidente della Facoltà filosofica dell' I. R. Università di Vienna e Socio di parecchie Accademie.

Francesconi Ermenegildo, I. R. Consigliere Aulico, Cav. di seconda classe dell' I. R. Ordine Austriaco della Corona di Ferro, Commendatore del R. Ordine Belgio di Leopoldo, Socio onorario dell' I. R. Accademia di Belle Arti in Venezia, Capo dell' I. R. Direzione Generale tecnico-amministrativa per le strade ferrate dello Stato.

Sartori Canova monsignor Giovanni Battista, Vescovo di Mindo, Cav. della Corona di ferro, Socio onorario dell' I. R. Accademia di Belle Arti in Venezia.

MEMBRI EFFETTIVI PENSIONATI

(26 Novembre 1839)

Santini Giovanni, Cav. di terza classe dell' Ordine Imperiale Austriaco della Corona di Ferro, Cav. del R. Ordine Danese del Dannebrog e di quello Granduecale Toscano di s. Giuseppe, Direttore della Facoltà matematica, dell' I. R. Osservatorio, e Professore di Astronomia nell' I. R. Università di Padova.

Catullo dottor Tomaso Antonio, Cav. della Milizia Aurata, Professore di Storia Naturale nell' I. R. Università di Padova.

Zendrini ab. Angelo, Professore emerito di Matematica dell' I. R. Università di Padova, in Mestre.

Zantedeschi ab. Francesco, Professore di Fisica nell' I. R. Liceo di Venezia.

(26 Novembre 1839 — 20 Giugno 1843)

Casoni ingegnere Giovanni, Architetto all' Ufficio delle fabbriche civili e lavori idraulici dell' Arsenale, in Venezia.

(26 Novembre 1839 — 16 Gennaio 1844)

Fapanni dottor Agostino, Cav. della Milizia Aurata, in Treviso.

Pasini Lodovico, *come sopra*.

(26 Settembre 1840)

Bizio dottor Bartolomeo, Professore nell' I. R. Scuola Tecnica, in Venezia.

Bellavitis nob. Giusto, Professore di Geometria descrittiva nell' I. R. Università di Padova.

Furlanetto ab. Giuseppe, in Padova.

Venanzio dottor Girolamo, in Portogruaro.

Sandri Giulio, in Verona.

Bianchetti dottor Giuseppe, in Treviso.

(26 Settembre 1840 — 3 Giugno 1843)

Fusinieri dottor Ambrogio, in Vicenza.

Scopoli conte Gio. Antonio, Segretario perpetuo dell' Accademia di agricoltura, commercio ed arti, in Verona.

Nardo dottor Gio. Domenico, in Venezia.

(26 Settembre 1840 — 20 Giugno 1843)

Contarini conte Nicolò, in Venezia.

(26 Settembre 1840 — 16 Gennaio 1844)

De' Visiani dottor Roberto, Professore di Botanica nell' I. R. Università di Padova.

(3 Giugno 1843)

Minotto nob. Giovanni, in Venezia.

MEMBRI EFFETTIVI NON PENSIONATI

(26 Novembre 1839)

Racchetti dottor Alessandro, I. R. Consigliere, Professore di Procedura giudiziaria nell' I. R. Università di Padova.

Menin abate dottor Lodovico, *come sopra.*

Paleocapa ing. Pietro, Cav. di terza classe dell' Ordine Imperiale Austriaco della Corona di Ferro, Direttore delle Pubbliche Costruzioni in Venezia.

(21 Marzo 1840)

S. E. il sig. conte Leonardo Manin, Grande Ciambellano del Regno Lombardo-Veneto, I. R. Consigliere intimo di S. M. I. R., in Venezia.

(26 Settembre 1840)

Conti dottor Carlo, Professore di Matematica applicata nell' I. R. Università di Padova

(3 Giugno 1843)

Jappelli ing. Giuseppe, in Padova.

Barbieri ab. Giuseppe, Professore emerito, in Padova.

Zanon Bartolomeo, Chimico farmacista, in Belluno.

Milani ing. Giovanni, in Venezia.

(20 Giugno 1843)

Cortese dottor Francesco, Professore di Anatomia nell' I. R. Università di Padova.

Turazza dottor Domenico, Professore di Geodesia e Idrometria nell' I. R. Università di Padova.

(16 Gennaio 1844)

Giacomini dottor Giacomo Andrea, Professore di Medicina nell' I. R. Università di Padova.

Meneghini dottor Giuseppe, Professore nell' I. R. Università di Padova.

Carrer dottor Luigi, *come sopra.*

Freschi nob. Gherardo, in s. Vito del Friuli.

Maggi Pietro, Dottore in Matematica, in Verona.

Cittadella conte Giovanni, in Padova.

Minich dottor Serafino Rafaele, Professore di Calcolo sublime nell' I. R. Università di Padova.

Poli dottor Baldassare, Professore di Filosofia nell' I. R. Università di Padova.

Namias Giacinto, Dottore in Medicina, in Venezia.

SOCII CORRISPONDENTI

DELLE PROVINCIE VENETE

(28 Novembre 1842)

Cicogna Emmanuele, Cav. della Legion d'onore, Consigliere straordinario dell' I. R. Accademia di Belle Arti, in Venezia.

Fario L. Paolo, Dottore in Medicina, in Venezia.

Galvani dottor Andrea, in Pordenone.

Parolini nob. Alberto, Scudiere di S. M., in Bassano.

Parravicini nob. Luigi, Direttore dell' I. R. Scuola Tecnica, in Venezia.

Pasini Valentino, Dottore in legge, in Vicenza.

De Tipaldo dottor Emilio, Cav. dell'Ordine R. Greco del Salvatore, in Venezia

(7 Agosto 1843)

Gera Francesco, Dottore in Medicina, in Conegliano.

Mugna Gio. Battista, Dottore in Medicina, in Padova

Toblini Giacinto, Professore di Matematica nell' I. R. Liceo di Verona.

Zanardini Giovanni, Dottore in Medicina, in Venezia.

Zinelli ab. Federico, Professore e Vice-direttore dello studio filosofico nel Seminario Patriarcale di Venezia.

(26 Maggio 1844)

Asson Michelangelo, Dottore in Medicina e Chirurgia, in Venezia.

Bernardi ab. Giuseppe, in Padova.

Cappelletto Antonio Alipio, Ingegnere meccanico, in Venezia.

Penolazzi Ignazio, Dottore in Medicina, in Venezia.

Quadri Antonio, Consigliere Imperiale, in Venezia.

Sagredo conte Agostino, Consigliere straordinario dell'I. R. Accademia di Belle Arti, in Venezia.

Zescevich Giovanni, Professore nell' I. R. Collegio di Marina, in Venezia.

(20 Gennaio 1845)

Selvatico Estense nob. Pietro, in Padova.

Spongia dottor Filippo, Direttore della Facoltà medica dell' I. R. Università di Padova

(7 Agosto 1845)

Canal ab. nob. Pietro, Professore di Filologia nell' I. R. Liceo di Venezia.

Perego dottor Antonio, Professore di Fisica nell' I. R. Università di Padova.

(22 Marzo 1846)

Clementi dottor Giuseppe, in Padova.

Negri dottor Cristoforo, Professore di Scienze politiche nell' I. R. Università di Padova

Trois dottor Francesco Enrico, Direttore del Civico Ospitale di Venezia.

(30 Novembre 1846)

Locatelli dottor Tommaso, in Venezia.

Valentinelli ab. Giuseppe, I. R. Bibliotecario della Marciana, in Venezia.

Zambra dottor Bernardino, Professore di Fisica nell' I. R. Liceo di Udine.

FUORI DELLE PROVINCIE VENETE

Arcari ingegn. Giovanni, in Trieste.

Arneth cav. Giuseppe, Direttore dell' I. R. Gabinetto di Numismatica e di Antichità, in Vienna.

Aucher padre Giambattista, della Congregazione Armena dei Mechitaristi.

Baumgartner prof. Andrea, Direttore della Facoltà filosofica dell' I. R. Università di Vienna.

De Bianchini Beroaldo, Tenente Maresciallo in Vienna.

Cantù cav. Cesare, in Milano.

Czoernig cons. Carlo, Direttore dell' Ufficio di Statistica amministrativa in Vienna.

Endlicher Stefano Ladislao, Professore di Botanica in Vienna.

D' Ettingshausen Andrea, Professore di Fisica nell' I. R. Università di Vienna.

De Filippi Filippo, Dottore in Medicina, Aggiunto al Museo civico di Storia Naturale, in Milano.

Ghega cons. Carlo, Dottore in Matematica, I. R. Ispettore delle strade ferrate, in Vienna.

Hyrtl Giuseppe, Professore di Anatomia nell' I. R. Università di Vienna.

Kreil dottor Carlo, Astronomo Direttore dell' I. R. Osservatorio di Praga.

De Lugnani Giuseppe, Direttore dell' I. R. Accademia di Nautica, in Trieste.

Mainardi dottor Gaspare, Professore di Matematica nell' I. R. Università di Pavia.

Partsch dottor Paolo, Conservatore dell' I. R. Gabinetto di Storia Naturale, in Vienna.

Pratobevera bar. Carlo Giuseppe di Vienna.

Prechtel cons. Gio. Giuseppe, Direttore dell' I. R. Istituto Politecnico, in Vienna.

Rosmini abate Antonio, di Roveredo.

Tommaseo Nicolò, di Sebenico.

Unger Francesco, Professore nel Gioanneo di Grätz.

Zendrini Gio. Maria, Professore di Storia naturale nell' I. R. Università di Pavia.

FUORI DELLA MONARCHIA

Amici cav. Gio. Battista, di Firenze.

Antinori comm. Vincenzo, di Firenze.

Bertoloni prof. Antonio, di Bologna.

Bonafous cav. Matteo, di Torino.

Bonaparte Carlo Luciano, Principe di Canino, in Roma.

Botto prof. Giuseppe Domenico, di Torino.

Buffalini cav. Maurizio, di Firenze.

Dalle Chiaie prof. Stefano, di Napoli.

Duca di Serra di Falco Domenico, di Palermo.

Genè cav. Giuseppe, in Torino.

Giordani Pietro, di Parma.

Giorgini cav. Gaetano, di Firenze.

Giulio prof. Carlo Ignazio, di Torino.

Linari prof. Santi, di Siena.

Marianini cav. Stefano, in Modena.

Matteucci prof. Carlo, di Pisa.

Melloni cav. Macedonio, in Napoli.

Moris cav. Giacinto, di Torino.

Mossotti cav. Ottaviano Fabrizio, di Pisa

Orioli prof. Francesco, di Roma.

Paoli conte Domenico, di Pesaro.

Pareto march. Lorenzo N., di Genova.

Parlatore prof. Filippo, di Firenze.

Pianciani prof. Gio. Battista, di Roma.

Pilla prof. Leopoldo, di Pisa.

Piria prof. Rafaele, di Pisa.

Plana comm. Giovanni, di Torino.

Puccinotti prof. Francesco, di Pisa.

Repetti prof. Emmanuele. di Firenze.

Ridolfi march. Cosimo, di Firenze.

Savi cav. Paolo, di Pisa.

Scacchi prof. Arcangelo, di Napoli.

Sismonda cav. Angelo, di Torino.

Spinola march. Massimiliano, di Genova.

Tenore cav. Michele, di Napoli.

MEMORIE

SULLA

FILOSOFIA DELLA FISICA

MEMORIA

DEL DOTT. AMBROGIO FUSINIERI

Per esaurire ne' suoi dettagli l'argomento dell'uso della filosofia nella fisica, converrebbe percorrere tutti i rami di questa, ed allora diverrebbe assai vasto. Io mi limito a dei principii generali i quali servono di guida, e di cui le applicazioni son facili per chi li abbia rettamente intesi, e non sia troppo prevenuto da sistemi immaginarii, il qual difetto pur troppo è frequente.

§ I.

Metafisica

1. Le idee delle cose a noi esterne ci vengono dai sensi. Circa gli errori dei sensi molto fu scritto dai filosofi. Se vediamo un corpo in distanza e da vicino, le due sensazioni sono differenti. Un globo, per esempio, a certa distanza ci sembra un piano circolare. Se armiamo l'occhio di microscopio vediamo in un corpo ciò che sfuggiva all'occhio nudo; e quanto più forte è il microscopio ci vediamo sempre delle cose nuove e sempre ne restano di non vedute. Inoltre le

idee che ci danno i corpi sono idee di superficie. Per quanto si prosegua a dividerli e suddividerli, le idee restano sempre superficiali. Niente di ciò ch'è veramente interno, ossia dei corpi in se stessi.

Le sensazioni dunque non ci danno le vere idee delle cose. Derivano da impressioni che ricevono i nostri organi, dissimili dagli oggetti che le producono. Così i colori, i suoni, i sapori, gli odori sono modificazioni dei nostri sensi, e non esistono fuori di noi.

Ci mancano le vere idee delle cose esterne tanto quanto ad un uomo manca la idea dell'interno di un altro uomo. Quell'*io* per cui ciascuno è conscio di se stesso è impercettibile ad un altro. È soltanto per analogia della coscienza che ognuno ha di se stesso, che la suppone negli altri senza esserne a parte.

Quello che i sensi ci rappresentano si chiama *fenomeno*. Per una specie d'istinto invincibile, riportiamo fuori di noi quello che sentiamo, come se esistesse simile, anzi identico, alle nostre sensazioni.

2. Dalle sensazioni individuali formiamo delle idee generali, ma in qual modo? Non è possibile formarsi una idea intuitiva, ossia una immagine, di un oggetto generale; come non è possibile che un oggetto generale esista. Tutto quello che esiste è individuo *omnimode determinatum*, dicono i filosofi.

Come non è possibile, per esempio, che esista un triangolo generico, ossia senza determinazione delle quantità dei lati e degli angoli, così è ugualmente impossibile rappresentarselo nella mente. Le idee generali, o astratte, in luogo di essere intuitive, sono sempre simboliche. Così i matematici rappresentano le quantità con cifre, le quali non hanno similitudine colle cose che sono destinate a rappresentare.

Il segno o simbolo è un mezzo virtuale di rappresentazione. Vale a dire, col simbolo s'indica la potenza della mente di rappresentarsi tutti gli individui possibili di un dato genere. È un vessillo sotto il quale si raccolgono, non in atto, ma in possibilità tutte le rappresentazioni individuali che hanno una certa rassomiglianza fra di loro. Ma non si possono distaccare le somiglianze delle cose simili. E quando in geometria si adopra una figura individuale, per esempio un circolo, lo adopriamo come simbolo di tutti i circoli possibili.

Gli scrittori di logica non hanno avvertito che le idee generali non esistono nella mente per mezzo d'immagini, ma soltanto per mezzo di simboli. Hanno anzi supposto la esistenza di idee generali come rappresentazioni nella mente di cose comuni agli individui; ed è questo un errore.

Donde anche questa conseguenza: che due idee contraddittorie non possono coesistere se non che per simboli. Sono tanto impossibili due immagini contraddittorie, quanto è impossibile che una cosa sia e non sia nello stesso tempo.

3. Come per mezzo dei simboli divengono generali le nostre idee, così formiamo collo stesso mezzo i giudizii o proposizioni generali (soggetto e predicato); ed i raziocinii che sono applicazioni ai casi speciali dei giudizii generali (i sillogismi). Donde le tre operazioni della mente (idee, giudizii e raziocinii). Le connessioni dei raziocinii in serie costituiscono le dimostrazioni. Quindi la scienza ch'è *habitus demonstrandi*.

La logica dà le regole per la formazione dei giudizii e dei raziocinii, senza delle quali si cade in errore. Qui si vuole notare al proposito che tutto si fa per simboli e non per composizioni di idee intuitive.

4. Col mezzo di simboli o vocali o scritti gli uomini si comunicano dall'uno all'altro le idee, i giudizii, i raziocinii. Per la qualità della nostra organizzazione, e principalmente per l'uso dei simboli a cui la nostra organizzazione ci rende atti, e per la conseguente nostra capacità a dette tre operazioni della mente, capacità che costituisce il nostro *intelletto*, siamo immensamente superiori ai bruti. E la principale sorgente delle grandi differenze che vi sono fra popoli rozzi e popoli inciviliti, consiste nella perfezione minore o maggiore dell'uso dei simboli vocali o scritti. Quanto grande e meravigliosa divenga la nostra potenza intellettuale per mezzo dei simboli lo mostra l'analisi matematica.

5. Dove le idee sono così semplici che non vi è errore ad assumerle come simili alle cose, per esempio in geometria; o dove i simboli differiscono bensì dalle cose, ma sono trattati con leggi che non

differiscono da quelle delle cose esterne, come nell'aritmetica e nell'analisi: il nostro intelletto opera con sicurezza, perchè nulla v'è nelle cose esterne che non sia rappresentato nei simboli; sicchè riescono questi equivalenti a quelle. Donde le scienze esatte, come la geometria, la meccanica e tutta la matematica, scienza delle quantità.

Ma dove i fenomeni (n. 1) sono tanto imperfetti da non comprendere l'insieme delle cose esterne, e dove tante parti di queste restano senza il corrispondente nei fenomeni, si ha un mondo ideale assai lontano dall'analogia col mondo reale. Tali sono le scienze delle cose naturali, fra le quali principalmente la Fisica.

Siccome però abbiamo sempre il potere di generalizzare le idee simbolicamente, e di formarne giudizii e raziocinii; e siccome d'altro canto le leggi dei fenomeni hanno le loro analoghe negli oggetti reali, perchè quelli sono effetti di questi: così per mezzo di quella potenza, e per mezzo di nuove osservazioni che rendono sempre più i fenomeni analoghi (non mai simili) alle realtà esterne, le scienze delle cose naturali progrediscono.

Ma resta sempre vero che i fenomeni sono dissimili dagli oggetti reali in se stessi (n. 1); e che tante realtà non hanno il corrispondente nei fenomeni sensibili; cosicchè rimangono in gran parte totalmente occulte. Ecco le imperfezioni delle scienze naturali; imperfezioni che possono essere e vengono di continuo diminuite e con nuove osservazioni, e con nuovi raziocinii; senza che possano essere tolte intieramente.

A causa di quelle imperfezioni, ed a causa della intemperanza di voler sapere al di là dei fenomeni, e al di là di ciò che dai fenomeni si può rettamente dedurre col raziocinio, molti pretendono supplirvi con supposizioni arbitrarie, le quali riescono o fuori dei fenomeni o contro i fenomeni; oppure fuori o contro le legittime deduzioni che dai fenomeni si traggono. Tali supposizioni si dicono *ipotesi*. Oppure abusando della nostra facoltà di usare mezzi simbolici di rappresentazione, vengono adoprati dei termini privi di idee corrispondenti, ossia vani e vuoti di senso.

6. La filosofia che si definisce *scientia possibilium quatenus esse*

possunt, ha dei principii generali e dimostrati, per non cadere in quelle vanità e in quegli errori; e sono principii applicabili non solo alla scienza delle cose naturali, ma anche a tutte le altre.

I principii fondamentali da cui procedono tutti gli altri sono due. Il principio di contraddizione *Fieri non potest ut idem simul sit et non sit,* che fu usato fin dal tempo di Aristotile e dagli scolastici. L'altro è il principio di ragione sufficiente *Nihil est sine ratione sufficiente cur potius sit quam non sit.* Di tale principio usò una volta Archimede a stabilire le leggi statiche. Ma fu poi da Leibnizio espressamente introdotto in filosofia, per la rettificazione delle idee e per dimostrare le proposizioni.

Si distingue la causa della ragione sufficiente in ciò; che la causa efficiente, la quale ha un'azione produttrice, è anteriore di tempo all'effetto. Non è così della ragione sufficiente. Dall'avere un triangolo un angolo retto, s'intende che il quadrato della ipotenusa sia eguale alla somma dei quadrati dei cateti. Nell'angolo retto vi è la ragione sufficiente della eguaglianza di quella somma; come viceversa dalla eguaglianza di quella somma s'intende che uno dei tre angoli sia retto. Qui non vi è nè causa nè effetto con differenza di tempo. Al contrario se un corpo in moto urta in un corpo quiescente, quell'urto è causa che il secondo si mova.

In ambidue i casi da una idea si passa necessariamente all'altra. Ma nel primo caso non vi è la differenza di tempo che vi è nel secondo. La causa prossima è sempre ragione sufficiente dell'effetto, ma non sempre la ragione sufficiente è causa.

§ II.

Fisica generale; primi principii

7. I due esposti principii (n. 6) hanno grandissimo uso nella filosofia della fisica. Servono ad evitare l'errore; tutto quello cioè ch'è contrario ai fenomeni, e ad evitare l'immaginario, cioè quello ch'è fuori dei fenomeni.

Nel trattare filosoficamente la fisica si sentono ad ogni istante quelle

imperfezioni dei fenomeni di cui sopra (n. 5), per cui di tanti effetti ci restano occulte le cause. E bisogna dire di più, che di tante qualità dei corpi che non arrivano a ferire i nostri sensi, i fenomeni non ci danno idea alcuna.

Eppure il nostro istinto è tale di riportare fuori di noi le nostre sensazioni come fossero oggetti esterni (n. 1). Cosicchè siamo condannati a questa perpetua contraddizione; di supporre i corpi del tutto simili ai fenomeni, e di lagnarci che i fenomeni non ci presentano le vere qualità dei corpi.

In quanto alle conseguenze in fisica del principio di ragione sufficiente, una immediata è questa.

Qualunque corpo persevera nello stato di quiete, o a moversi uniformemente in diretto, se non vi è causa esterna che gli faccia cangiare il suo stato.

È la prima delle leggi di moto assunte da Newton ne' suoi principii matematici di filosofia naturale.

8. Anche stando ai fenomeni (n. 1), le cose soggette a mutazioni interne e che rimangono le medesime si chiamano *sostanze*. Quindi fu definita la sostanza *subjectum perdurabile et modificabile*. Con tutte le mutazioni a cui siamo di continuo soggetti, esperimentiamo in noi stessi di essere una sostanza.

Meglio si definisce la sostanza per *subjectum vi activa praeditum*, o per *subjectum actionis* ch'è lo stesso; perchè non vi sono sostanze puramente passive, come importerebbe l'altra definizione.

Le sostanze sono in continua mutazione di stato interno, anche per azione propria, e lo sperimentiamo in noi stessi.

9. I sensi non ci presentano all'esterno che sostanze estese, ossia *corpi*. Cartesio avea definito il corpo colla sola estensione, *ens extensum*, confondendolo collo spazio. Altri l'ha definito in seguito per un ente composto ch'entra come parte a costituire il mondo. Ma con tale definizione si è inteso per composto un aggregato di enti semplici inestesi, a modo delle monadi di Leibnizio; sicchè quella definizione è fondata sopra un'ipotesi. Migliore di tutte è la definizione del corpo secondo i fenomeni, *substantia extensa vi motrice praedita*.

Se si considerano i corpi soltanto come passivi per azione di altri corpi o sostanze, si dicono *materia*.

Proprietà essenziale del corpo è di essere impenetrabile. La impenetrabilità dei corpi si dimostra col principio di contraddizione (n. 6) in questo modo.

Se due corpi fossero compenetrati occuperebbero lo stesso spazio; cosicchè in qualunque parte, per quanto si voglia piccola, dello spazio occupato dai due corpi, vi sarebbero ad un tempo le qualità dell'uno e le qualità dell'altro; il che è impossibile, perchè le qualità dei due corpi si escludono a vicenda. Supposto per esempio che i due corpi siano oro e ferro; ogni più piccola parte della estensione comune sarebbe ad un tempo oro e ferro, il che è contraddittorio.

Essendo ogni corpo un individuo *omnimode determinatum* (n. 2); nè potendo esistere corpi in astratto, cioè con sole qualità comuni affatto identiche, la dimostrazione procede in tutti i casi.

10. Posta la impenetrabilità dei corpi io dimostro col principio di ragione sufficiente la comunicazione di moto da uno all'altro come segue.

Un corpo in moto non esiste realmente in nessun luogo dello spazio percorso; ossia non vi esiste oltre un istante ch'è lo stesso; imperocchè se esistesse in un luogo di quello spazio per un tempo comunque piccolo, siccome in quel tempo sarebbe in quiete, persisterebbe a rimanervi secondo il principio del n. 7.

O in altri termini; non si può concepire che un corpo sia in un luogo qualunque dello spazio percorso senza concepire insieme che lo abbandoni. Vi è dunque nel moto antecedente la ragione sufficiente, ossia la causa del moto seguente (n. 6). E più esattamente; nel momentaneo del moto vi è la ragione sufficiente di proseguirlo. Quel momentaneo, ragione sufficiente della continuazione del moto, dicesi *conato*. E siccome la ragione sufficiente del moto si chiama *forza*, il conato e la forza sono la stessa cosa.

Ora se un corpo in moto si riduce contiguo ad un corpo quiescente; in quel moto vi è la ragione sufficiente che il primo corpo entri nel luogo occupato dal secondo. E siccome ambidue sono impe-

netrabili, non può il primo entrare nel luogo del secondo senza che questo lo abbandoni. Dunque di necessità il secondo dee moversi.

Se il primo corpo giunto in contatto del secondo si fermasse, ciò sarebbe contro il principio di ragione sufficiente. Se il secondo non si movesse sarebbe penetrato, il che è impossibile (n. 9).

Vi è dunque nel moto del primo e nella impenetrabilità dei due corpi la ragione sufficiente donde s'intende che il secondo si mova. Ed in questo caso la ragione sufficiente è causa (n. 6).

Il conato del primo corpo di occupare il luogo del secondo si dice anche *conflitto* o *urto*. Donde il conflitto dei corpi è causa necessaria di comunicazione di moto. Anzi niun'altra causa è concepibile.

Nell'atto che il secondo corpo acquista moto dal primo, tanto è l'urto di quello su questo, quanto di questo su quello. Non è possibile che un corpo prema un altro senza essere egualmente premuto. L'urto del secondo sul primo si dice *reazione*, la quale è uguale e contraria all'*azione*. Sono due idee equivalenti, e la pressione è reciproca ed una sola. Le due idee non differiscono che nell'ordine di concepire la stessa pressione. In quanto si concepisce la pressione di *A* mosso contro il corpo *B* quieto si dice *azione*. In quanto si riferisce la stessa pressione a *B* contro *A* si chiama *reazione*.

Al quale proposito di idee equivalenti, ne ravviserà una serie chi attende alla suddetta dimostrazione della comunicazione di moto per conflitto, le quali non differiscono che nell'ordine di rappresentazione comunque simbolica (n. 2, 3).

Così è sempre quando dalla ragione sufficiente si passa a ciò di cui è ragione sufficiente. E in genere i raziocinii, le dimostrazioni, consistono in una serie di idee equivalenti. Del che esempii chiarissimi si ha in tutta la matematica; e per simboli differenti dalle cose nell'analisi.

Il moto acquistato da un corpo per conflitto ha poi la stessa legge del n. 7. Si dimostra inoltre secondo le masse dei due corpi e la celerità del primo, qual sia la celerità comune dopo il conflitto; e di più come vengano nel conflitto modificate le celerità e le direzioni dalla elasticità dei corpi; e quali siano le leggi di moto dopo il con-

flitto, se ambidue i corpi siano prima in moto o per la stessa direzione o in contrario. E le esperienze confermano le deduzioni.

11. Sorprende che i Cartesiani non abbiano ravvisata la necessità della comunicazione del moto nel conflitto dei corpi. L'hanno considerata tanto misteriosa che vi fecero intervenire di mezzo la Divinità; nel che si è distinto Malebranche, il quale in tal modo ha ridotta la comunicazione di moto ad un miracolo.

D'altro canto Leibnizio ha data una idea immaginaria e falsa della forza motrice, considerandola una realtà interna ai corpi quasi stimolo al moto, e da questo diversa. Donde ha dato anche una misura delle forze vive differente dalla misura del moto.

Tutte queste fantasie svaniscono quando si considera, che la forza motrice non è altro che il momentaneo del moto, ossia il conato (n. 10). La comunicazione del moto da un corpo all'altro è conseguenza del principio di ragione sufficiente, e del principio di contraddizione (n. 6) in quanto alla impenetrabilità dei corpi (n. 9).

12. Il moto locale di un corpo è un cangiamento di sua relazione esterna cogli altri corpi, cioè di posizione e distanze. Nulla vi è d'intrinseco nel moto; ed il corpo in se stesso è indifferente tanto allo stato di quiete che a quello di moto (n. 7). Ciò è così vero che se vi fossero nel mondo due soli corpi che cangiassero di distanza, sarebbe indiscernibile quale dei due si movesse e quale fosse in quiete; o se ambidue si movessero.

Ma ogni corpo come sostanza è in continua mutazione di stato interno (n. 8). Nè mutazione alcuna si può concepire nei corpi senza moto. Cosicchè le mutazioni interne dei corpi consistono in moti intestini fra le loro parti. È il moto intestino fra le parti, e non il moto locale che importa nei corpi cangiamenti intrinseci. Tali cangiamenti sono continui, comunque fra parti piccole e insensibili. Cosicchè un corpo non dura assolutamente identico nel suo interno oltre un istante. Questo è di tutte le sostanze già dotate di forza attiva, e lo esperimentiamo in noi stessi (n. 8). La durata nei corpi del medesimo stato interno non è che un'apparenza, un fenomeno. Egli è perchè le mutazioni riescono insensibili (n. 1).

Siccome gli stessi movimenti intestini non sono che cangiamenti di relazioni fra le parti del corpo; è chiaro che il cangiamento di semplice relazione fra le parti è cangiamento reale intrinseco rispetto al tutto.

15. Nel conflitto dei corpi vi è la ragione sufficiente di comunicazione di moto (n. 10). Nè si può concepire che senza moto vi sia produzione di moto; nè che vi sia produzione di moto senza conflitto dei corpi, il quale non si dà senza contatto.

La ragione sufficiente, e ciò di cui è ragione sufficiente, non differiscono se non che nell'ordine di rappresentazione nella nostra mente (n. 10). Posta una è necessario porre anche l'altra e viceversa. Così posto il conflitto dei corpi si concepisce necessaria la comunicazione di moto; e posta la comunicazione di moto si concepisce necessario il conflitto.

È quindi inconcepibile che un corpo produca moto in un altro corpo a distanza senza contatto e senza conflitto. Ed è ancora più inconcepibile che un corpo in istato di quiete produca moto in un altro corpo a distanza.

Tutto questo dimostra assurde quelle attrazioni a distanza che i fisici moderni ammettono come forze primitive dei corpi.

In quanto alle attrazioni e repulsioni elettriche e magnetiche, invece di collocarle fra le parti dei corpi, le collocano fra parti di supposti fluidi imponderabili di cui si dirà qui sotto (§ V.).

È bensì vero che i fenomeni come vengono dai sensi (n. 1) rendono apparenti quelle attrazioni senza conflitto. Ma gli stessi fenomeni palesano che causa di comunicazione di moto è il conflitto; e coll'intelletto si comprende (n. 4) che senza conflitto non vi può essere comunicazione di moto, per essere quello ragione sufficiente di questo (n. 10).

Bisogna sempre rammentarsi che i fenomeni, sempre dissimili dalle cose in se stesse, non ci danno di queste che immagini imperfettissime (n. 1, 4, 5); e che la scienza delle cose naturali è sempre in aspettazione di nuovi progressi in virtù di nuove osservazioni.

Quelli che ammettono le attrazioni a distanza come forze primitive

e indipendenti da ogni conflitto, versano in questo errore, che quello che finora è insensibile non esista. E di più ammettono quelle generazioni di moto a distanza contro il principio di ragione sufficiente.

14. Nei fenomeni molecolari, come son quelli delle chimiche affinità, e come son quelli della forza repulsiva da me scoperta nella materia attenuata, le attrazioni e repulsioni sono fra parti così minute, che per dipendere da conflitti o da pressioni devono queste avvenire col mezzo di materie ancora grandemente più sottili; il che mostra in quale profondità di abisso, rispetto ai nostri sensi, giacciano le cause prime degli effetti sensibili.

Per altro le mie osservazioni di meccanica molecolare mi hanno dimostrata una causa evidente di coesione nelle reazioni convergenti della forza repulsiva fra le parti dei corpi. Ma resta sempre da conoscere la causa per conflitto o pressione della stessa azione repulsiva; ed inoltre resta da sapere se la reazione della forza repulsiva sia la sola causa di coesione.

E siccome la repulsione fra le parti della materia attenuata è sempre in due contrarie direzioni, una dal dentro al fuori, l'altra dal fuori al dentro, la stessa forza che opera la coesione dal fuori al dentro, agisce anche in contrario. Donde io rendo ragione di quelle emanazioni tenuissime che portano con se le immagini dei corpi, le quali sotto certe condizioni si rendono sensibili sopra piani levigati secondo le recenti esperienze di Moser.

15. La gravità dei corpi terrestri e la gravitazione universale dei corpi celesti appartengono pure a quel genere di fenomeni dei quali non si conoscono le cause; e perchè non si conoscono, vengono ammessi quegli effetti come forze primitive, indipendenti da ogni conflitto o pressione, ossia senza causa. Vi è la stessa assurdità di cui sopra (n. 13). Se fosse dimostrato che niente per assoluto vi sia di mezzo fra i corpi celesti, sarebbe da compatire chi credesse a tendenze miracolose dei corpi fra loro reciprocamente. Ma quel niente di mezzo è ben lungi dall'essere dimostrato. Intanto luce frammista a calore anche oscuro; raggi detti *chimici* invisibili frammisti alla luce ed al calore, ma che operano effetti assai segnalati per contatto; tutto

questo mostra abbastanza che vi sono continue emanazioni per irraggiamento dai corpi celesti, le quali si diffondono nella immensità dello spazio. Tali emanazioni servono di mezzo di comunicazione per contatto dei corpi fra di loro. Non sappiamo ancora le qualità e le quantità di tutte le emanazioni, nè quali effetti meccanici siano atte a produrre.

E siccome abbiamo prove di quelle emanazioni anche dai corpi terrestri, sia per la forza repulsiva da me dimostrata in tutta la materia attenuata, sia per le recenti osservazioni di Moser spiegabili con quella forza, io ritengo come abbastanza fondato questo principio:

Da ogni corpo emana materia allo stato raggiante a un grado di tenuità superiore ad ogni immaginazione.

Questo principio conduce a considerare la divisibilità dei corpi.

§ III.

Divisibilità dei corpi

16. I corpi come sostanze (n. 8, 9) sono di loro natura in continuo cangiamento di stato interno, e tale cangiamento consiste in moti intestini (n. 12). Le mutazioni interne che i corpi subiscono sono dimostrate anche dalle osservazioni; e intorno a ciò veggasi il trattato del sig. Paoli sul moto molecolare dei solidi.

Ma oltre la natura d'ogni sostanza che importa un continuo cangiamento del suo stato interno, del che abbiamo continua esperienza in noi medesimi; rimontando ai principii della Cosmologia abbiamo: che tutte le parti del mondo sono fra loro connesse e nell'ordine dei coesistenti e nell'ordine dei successivi, in virtù di reciproche influenze e della dipendenza degli effetti dalle cause, verità questa che risulta abbastanza anche dal suesposto (n. 10, 12, 13, 14).

Dal che deriva che le mutazioni continue alle quali il mondo è soggetto, importano mutazioni continue anche in qualunque ente o corpo ch'è parte dell'universo; comunque tali mutazioni risultanti dalle azioni del tutto riescano insensibili.

Donde questa verità incontrastabile: che lo stato interno di qualsivoglia ente o corpo non dura assolutamente identico oltre un istante. Sicchè la identità assoluta per un tempo dello stato interno dei corpi non è che un'apparenza, o per meglio dire una supposizione fallace, ed anche simbolica (n. 2, 3); perchè non è neppure possibile rappresentarci intuitivamente una identità assoluta per un certo tempo.

Se un corpo non dura assolutamente identico nel suo stato interno oltre un istante; molto meno possono darsi corpi assolutamente simili. È questa conseguenza necessaria della connessione fra tutte le parti dell'universo. Ma deriva immediatamente anche dal principio di ragione sufficiente; perchè se vi fossero due corpi assolutamente simili, sarebbe senza ragione sufficiente che uno esistesse nel suo luogo piuttostochè nel luogo dell'altro.

17. Le mutazioni interne dei corpi si risolvono in moti intestini (n. 12). E siccome ogni parte di corpo è pure un corpo, il moto intestino vi è in ogni parte, ed in ogni parte di parte, e così ulteriormente senza limite.

Tutto questo sembra a prima vista un paradosso contrario alle sensazioni. Ma sono da avvertire due cose. L'una che le sensazioni non ci rappresentano la verità delle cose in se stesse (n. 1). L'altra che le stesse sensazioni sono continuamente mutabili; e non conservano neppur esse un'assoluta identità oltre un istante (n. 16).

18. Conseguenza immediata del moto intestino dei corpi, e del moto intestino in ciascuna parte ed in ogni parte di parte, ed ulteriormente senza limite (n. 17) è questa, che la materia non solo è divisibile, ma è anzi attualmente divisa in parti di parti indefinitamente.

Del resto la divisibilità indefinita della materia si dimostra facilmente anche senza l'attuale divisione indefinita. Ogni corpo è divisibile in parti, ed ogni parte essendo pure un corpo, sarà pure divisibile; e così saranno divisibili parti di parti che sono sempre corpi, ed ulteriormente senza limite.

Si domanderà se dunque la materia sia divisa o sia divisibile all'infinito; e se vi siano parti infinitamente piccole. Io rispondo che la stessa divisione o divisibilità senza limite importa che non si possa

arrivare all'infinito, e che quindi non vi sono parti infinitamente piccole. Una divisione condotta all'infinito involve contraddizione e con se stessa e colla divisibilità senza limite.

§ IV.

Assurdità degli atomi

19. Per porre un limite alla divisibilità della materia, alcuni hanno supposto, che i primi elementi dei corpi siano senza estensione, e li chiamarono semplici. Così Leibnizio colle sue monadi, ed altri che hanno supposto privi di estensione gli elementi dei corpi (n. 9). Ma questo era ridurre il mondo ad un aggregato di punti fisici inestesi; era ridurre i corpi compenetrabili, cioè atti in più d'uno ad occupare lo stesso spazio, perchè i loro elementi non occupano spazio (n. 9); era togliere in conseguenza il conflitto dei corpi, e rendere impossibile la comunicazione del moto (n. 10).

20. Altri invece hanno supposto che i corpi siano composti di elementi bensì estesi, ma indivisibili colle forze naturali, e li chiamarono *atomi*. I chimici ne fecero il fondamento principale della loro pretesa filosofia, massime per la spiegazione delle combinazioni chimiche in proporzioni definite. Ma queste non importano la indivisibilità delle parti che si combinano indivise. Importerebbero soltanto che le forze chimiche non giungono a dividerle.

Ma non è molto che i volumi risultanti nelle combinazioni dei gas obbligarono a supporre anche la divisione degli atomi (*Annali delle Scienze* ec. 1833, p. 369). Peggio poi; vi sono le combinazioni in proporzioni indefinite, come le dissoluzioni, le leghe ec., che sono inesplicabili col mezzo degli atomi.

21. Secondo la idea antica degli atomi sono indivisibili di loro natura, altrimenti non sono atomi. Ma sono estesi, sono corpi, e quindi hanno parti. Queste dunque sarebbero fra loro coerenti per una forza infinita; e secondo i chimici moderni sono coerenti per un'attrazione superiore ad ogni forza naturale; quindi miracolosa.

Di conseguenza: durezza assoluta e senza causa naturale; continuità assoluta, cioè senza intervallo alcuno fra le parti; uniformità assoluta di queste; immutabilità interna assoluta, figure senza causa, quantità di materia proporzionale al volume, attitudine soltanto a moto locale, ed a conflitto secondo le leggi dei corpi duri.

Tali sono le idee immaginarie degli atomi desunte dalla idea primitiva ed unica di essere *estesi e indivisibili*; che viene data dalla supposizione pure immaginaria della loro esistenza.

In forza di tali idee sarebbero anche tutti simili, giacchè non avrebbero altre qualità che le indicate comuni a tutti. Quindi senza ragione sufficiente di trovarsi nei luoghi che occupano, piuttostochè in quelli occupati da altri atomi.

Inattivi di dentro, e attivi al di fuori soltanto per conflitto dei corpi duri, non sarebbero atti a produrre nei corpi nessuno di quei fenomeni alla cui spiegazione si vogliono destinare.

Si metton di mezzo fra tali esseri creati colla immaginazione attrazioni reciproche, delle quali non si rende nè si può rendere ragione alcuna colle suddette idee primitive e derivate di loro qualità. Quindi ancora attrazioni senza cause, ossia miracolose.

In somma la idea di atomi estesi e indivisibili come elementi dei corpi involve una moltitudine di assurdità. Su di che si veda negli *Annali delle Scienze* ec. 1835, pag. 149, *Riflessioni generali contro la teoria degli atomi e contro quella degli imponderabili.*

§ V.

Dei fluidi imponderabili e loro assurdi

22. La supposizione degli atomi ha condotto naturalmente alla ipotesi dei così detti *fluidi imponderabili*.

Colla prima supposizione non si ha che corpicelli durissimi, uniformi, immutabili intrinsecamente, e per se stessi inattivi; e vi si aggiungono attrazioni reciproche, delle quali niuna causa o ragione sufficiente nelle loro qualità.

Ma vi sono dei fenomeni corporei che procedono da forze repulsive. Queste forze repulsive vengono date a dei pretesi fluidi che si suppongono frapposti agli atomi.

Quindi attrazioni fra que' fluidi e gli atomi, repulsioni fra le parti di ciascun fluido, ed attrazioni reciproche fra gli atomi. Ecco creato il mondo stando a tavolino. Così il calorico, secondo la ipotesi, si attrae cogli atomi dei corpi; e fra le sue parti vi è repulsione.

Così fra le parti di ciascuno dei due fluidi elettrici positivo e negativo v' ha repulsione, e v' ha attrazione fra ciascuno di que' due fluidi e gli atomi dei corpi. Vi è poi un' altra attrazione fra le parti di un fluido e quelle dell' altro.

Lo stesso è dei due fluidi magnetici imponderabili, con questo che le loro attrazioni sarebbero quasi esclusivamente pegli atomi del ferro.

Con queste fantasie di sostanze e di forze, ove le attrazioni e repulsioni senza cause vengono dispensate a profusione, si è fabbricata la così detta *fisica teorica*.

Ampére in Francia dopo la scoperta dell' elettro-magnetismo avea cercato di spiegare gli effetti magnetici con correnti circolari dei fluidi elettrici. Negli *Annali delle Scienze* ec. 1840, ho esaminata quella ipotesi col confronto dei fenomeni, ed ho trovato che questi vi sono contrarii. Sembra che ora sia cessato il fervore per quella ipotesi.

La luce pure veniva considerata un fluido imponderabile, o per meglio dire una mescolanza di tanti fluidi imponderabili quanti sono i suoi colori. Anche questa con forza repulsiva fra le sue parti; ma sarebbe un fluido molto meno imbarazzante degli altri imponderabili con attrazioni reciproche cogli atomi dei corpi.

Ecco le sostanze immaginarie con forze altrettanto immaginarie, e senza cause, introdotte nei corpi, anzi fra i loro atomi, per dare spiegazione degli effetti repulsivi mostrati dai fenomeni.

23. Si vede in primo luogo che la ipotesi dei fluidi imponderabili è sussidiaria a quella degli atomi. Sicchè le assurdità degli atomi (§ IV.) si rinversano anche sopra gli imponderabili.

In secondo luogo per ammettere delle sostanze frapposte agli atomi,

o comunque fra le parti de' corpi, che producano gli effetti repulsivi, converrebbe mostrare la esistenza di tali sostanze; e per provare che esistano, converrebbe trovarle isolate dalla materia.

Le mie osservazioni di meccanica molecolare hanno dimostrato, che una forza repulsiva si sviluppa fra le parti della materia per il solo fatto di essere questa ridotta a minime dimensioni; ed ho stabilito delle leggi di azione e reazione di quella forza col mezzo delle stesse osservazioni. Io mi sono limitato ai fenomeni, ed a ciò che col mezzo dei fenomeni si può rettamente dimostrare, per dare così delle verità certe e luminose, sgombre dalle incertezze e dalle nubi delle ipotesi.

Per altro siccome i fenomeni mostrano uno sviluppo di forza repulsiva nella materia attenuata, e progressivo a misura della tenuità della materia, fino anco a potersi questa ridurre col mezzo della stessa forza allo stato raggiante; non v'ha dubbio che le verità da me dimostrate hanno recata una grave scossa al sistema degli imponderabili che furono introdotti nella materia.

Invece di creare un genere di sostanze per le repulsioni, alle quali sostanze si accordano insieme attrazione e fra di loro e cogli atomi dei corpi, il complesso dei fenomeni indica che attrazioni e repulsioni molecolari siano rispettivamente azioni e reazioni di una sola forza, o principio di azione esistente nei corpi; principio ancora sconosciuto, ma che si dee ridurre ad una causa di conflitti, pure sconosciuti, dai quali proceda di sua natura la comunicazione di moto (n. 10) sotto le apparenze di attrazioni e repulsioni.

Nè a tali oscurità, conseguenze della imperfezione dei fenomeni rispetto alle cose esterne (n. 1, 4, 5), si può supplire con ipotesi arbitrarie e chimeriche di atomi e di fluidi imponderabili; le quali ad altro non servono che ad impedire il progresso della vera scienza.

24. Si parla di fluidi imponderabili, e non si sa qual sorta di fluidità loro attribuire; perchè quando ci dipartiamo dai fenomeni e da ciò che coi fenomeni si può rettamente dimostrare, non abbiamo idee ma errori.

Quello che conosciamo è lo stato raggiante, come del calorico e

della luce, ma quello non è uno stato di fluidità. Lo stato raggiante dipende certamente da forza repulsiva fra le parti; e questa forza io l'ho trovata nella materia attenuata (n. 25), con progressivo suo sviluppo secondo che procede la suddivisione della materia. Donde è facilissimo concepire come la materia si possa ridurre allo stato raggiante. Per conseguenza lo stato raggiante del calorico e della luce non prova per niente che siano sostanze diverse dalla materia attenuata.

25. Quando poi si passa colla ipotesi a collocare i supposti imponderabili entro i corpi e fra gli atomi, si sa ancora meno qual forza di fluidità loro attribuire.

Certo è che per ritenerli in qualsivoglia modo fluidi, le loro parti prime dovrebbero essere solide, mobili e distanti; giacchè se tali non sono, se sono ancor fluide, non sono parti prime, ma risolubili in parti solide, mobili e distanti. La fluidità non può essere uno stato primitivo.

Di fatto lo stesso calorico, come imponderabile, fu considerato composto di molecole fra loro distanti a guisa della costituzione dei gas (*Annali delle Scienze* ec. 1835, pag. 57 e 151). Ecco dunque i supposti imponderabili costituiti in ultima analisi da atomi indivisibili, durissimi, densissimi, immutabili, capaci soltanto di moto locale e di conflitto secondo le leggi dei corpi duri, ossia da atomi eguali a quelli di cui si vuole composta la materia ponderabile (§ IV.). Sicchè col fabricare gl'imponderabili in ultima analisi non si è fatto niente.

26. Ma v'è anche di più. In causa della forza repulsiva che si suppone fra le parti di ciascun imponderabile (n. 22) non potrebbero que' supposti fluidi essere trattenuti entro i corpi; ma si disperderebbero nello spazio. Il calorico, per esempio, che si vuole interposto nei gas fra gli atomi materiali, immensamente fra loro distanti rispetto alle loro piccolissime masse, non potrebbe essere fra que' corpicelli trattenuto allo stato latente, ma si spargerebbe nello spazio allo stato raggiante, in virtù della sua forza repulsiva.

Questa sola riflessione mi pare che basti a dimostrare che le cose non possono essere come vengono supposte col mezzo d'imponderabili.

§ VI.

Ultime assurdità e vocaboli vuoti di senso

27. Da poco tempo sembrano abbandonate quelle chimere di tanti fluidi imponderabili interposti fra gli atomi dei corpi. Vi fu sostituito per tutti il così detto *etere*, di cui si suppone riempito lo spazio celeste. Si suppone un fluido elastico sottilissimo che sia internato anche in tutti i corpi, ossia collocato fra i loro atomi (§ IV.). Si danno a questo fluido tante e tante vibrazioni, oscillazioni, ondulazioni, ma colle parole, perchè non se n'ha idea alcuna, come non si ha idea neppure dello stesso etere (n. 1). Si vuole con ciò spiegare la luce ed i suoi colori, il calorico in genere, le due elettricità, i due magnetismi. E siccome i tanti effetti chimici della luce, che indicano la presenza di sostanze ponderabili, distruggono quella supposizione rispetto alla luce; alcuno si è sforzato di sottomettere alle vibrazioni dell'etere anche gli stessi effetti chimici della luce, colle astratte parole di *movimenti e disposizioni di molecole*, che sono vuote di senso.

Io non entrerò nei dettagli di queste nuove chimere sostituite alle precedenti (§ V.). In luogo di tante sostanze imponderabili se ne vuole ora una sola. Ma anche per questa bisogna cominciare dal provare la sua esistenza; al che nessuno si accinge. Fu addotto soltanto che una delle comete a breve periodo mostrato abbia di trovare una resistenza nel suo corso. Ma è già noto che senza l'etere lo spazio celeste non è affatto vuoto, e che vi è materia sparsa da per tutto, la quale concretandosi forma gli areoliti, i bolidi, gli asteroidi ec.

D'altronde quel preteso fluido universale che riempia il firmamento non si potrebbe ammetterlo finito; perchè come elastico si espanderebbe al di là di ogni limite che si volesse assegnargli. Ecco dunque un fluido infinito! Supposizione ben degna della qualità di filosofia che nei tempi recenti si usa nella fisica.

I matematici applicando il calcolo alle ondulazioni dell'etere giungono ad alcuni risultati analoghi a quelli della luce, come, per esempio,

quello delle interferenze. Ma il calcolo è un metodo astratto che non serve a determinare le cause fisiche dei fenomeni. Considera moti in genere, qualunque ne sia la causa, ed anche senza causa. Si crede di applicare il calcolo alle ondulazioni dell'etere, e invece si applica a ondulazioni in genere qualunque sia il mezzo ondulante, anche se fosse un mezzo in proiezione; per esempio se fosse un irraggiamento ondulatorio.

Infine si ripete dell'etere quello che si è detto dei fluidi imponderabili ora abbandonati (n. 25); che in ultima analisi dovrebbe essere costituito da parti solide, ossia da atomi colle stesse qualità degli atomi corporei; cioè durissimi, immutabili, senza causa di figure, privi di azioni interne e soggetti soltanto al conflitto dei corpi duri. Quindi sarebbero senza causa anche le supposte vibrazioni.

Si noti che col sostituire il solo etere a tutti gli altri imponderabili, si fa anche svanire quella caterva di attrazioni e repulsioni che con quelli si voleva associare (n. 22). A tutte quelle pretese forze senza cause si sostituiscono le vibrazioni, ma anche queste senza causa.

28. A tante vanità circa le cause dei fenomeni, viene a succedere ancora più di recente, o ad esservi associato, un altro metodo singolarissimo di filosofare. Si scopre, per esempio, una classe di fenomeni che non si sa spiegare colle ipotesi ammesse. Se ne ignora la causa; ma alla causa occulta si dà un nome d'ordinario tratto dal greco. Si riposa su quel nome, senza cercar altro; e si crede così di aver fatto avanzare la scienza.

È ben chiaro che a quel nome non corrisponde nessuna idea diversa da quella degli effetti osservati. Quindi il nuovo nome nulla ha aggiunto alla scienza. Con tal metodo si riconducono alla moda le qualità occulte degli scolastici.

Per esempio, si osserva che il platino colla sua presenza determina le combinazioni delle sostanze gazose senza nulla dare e nulla togliere; e si osservano altri effetti consimili. Non si sa la causa; e la causa che s'ignora si chiama *forza catalitica* (*Annali delle Scienze* ec. 1841, pag. 85). Ecco un nome che nulla aggiunge alla scienza; una qualità occulta.

Io veramente ho scoperta la causa di quel fenomeno del platino, e la ho pubblicata fino dal 1825 nel *Giornale di Fisica* di Pavia. Consiste in una successione di lamine concrete, a cui si riduce un gas o vapore sulla superficie del platino, lamine che scorrono, abbruciano in contatto dell'ossigeno atmosferico, e si rinnovano. Vedansi i fatti raccolti e ordinati del fenomeno negli *Annali delle Scienze* ec. 1835, Bim. I, II, III.

Quel fatto manifestissimo dimostra, che il platino non esercita alcuna forza, e non fa altro se non che offrire la sua superficie alla formazione e successione di quelle lamine. Quindi il termine di *forza catalitica* contiene anche un errore, supponendo nel platino una forza particolare e misteriosa.

Per altro esempio, si osserva che le gocce dei liquidi, i vapori delle sostanze anche solide, si espandono sulle superficie levigate; e nel caso dei vapori i corpicelli donde si svolgono, come la canfora, acquistano dei moti giratorii. Non si conosce la causa; e senza conoscerla le si dà il nome di *forza epipolica* (*Annali delle Scienze* ec. 1844. Appendice ai Bim. III, IV, pag. 28, e Bim. V, VI, pag. 215).

Quel fenomeno da me osservato accuratamente dipende dalla forza repulsiva che ho scoperto svilupparsi nella materia attenuata, di cui sopra (n. 23, 24); ed ho determinato che i corpicelli da cui si svolgono i vapori acquistano i moti giratorii per le reazioni in contrario della stessa forza repulsiva. Vedansi gli *Annali delle Scienze* del 1833, ove fu dato il sunto di altre mie Memorie degli anni 1821 e 1825. Cosicchè anche il termine di *forza epipolica,* indicante una qualità occulta, contiene o l'errore di attribuire alle sostanze che si espandono in superficie una forza misteriosa, o l'altro di attribuire alle superficie una forza che non hanno.

29. Ecco dunque a che si riduce la filosofia fisica che viene adoprata. In luogo di limitarsi ai fenomeni i quali possono essere spinti all'infinito con sempre nuove osservazioni, ed a ciò che dai fenomeni si può rettamente dedurre e dimostrare colle regole logiche; con una sfrenata immaginazione si fabbricano atomi, fluidi imponderabili, forze attrattive e repulsive senza cause; poi quasi tutto abbandonando ad

un tratto, si sostituisce un etere universale, e vibrazioni di questo pure senza cause; e in ultimo luogo, quasi per disperazione, s'inventano dei termini per contrassegnare delle cause occulte, i quali pure con supposizioni di forze misteriose comprendono degli errori.

(*Letta il* 19 *Giugno* 1845)

SOPRA UNO SCRITTO

DEL DOTT. AMBROGIO FUSINIERI

RISGUARDANTE LA FILOSOFIA DELLA FISICA

CONSIDERAZIONI

DEL PROF. CARLO CONTI

PARTE PRIMA

Da naturale tendenza fui sempre tratto a meditare su quella portentosa facoltà dell'uomo che il separa e distingue da tanti altri esseri viventi, che il rende dominatore della natura: e più volte in me stesso ristretto e raccolto andai perscrutando la via onde l'umana ragione raggiugne il vero, il reale, sia nelle relazioni de' proprii concetti, sia nella relazione de' fatti esteriori; andai ricercando i motivi pei quali talvolta afferra sicuramente un principio da cui scendono tante conseguenze che la serie de' fatti conferma, da poter dire che ha letto una pagina segnata dal dito di Dio ne' giorni della creazione; e i motivi pei quali tal altra vacilla ed inciampa, e cercando il vero da questo più si dilunga; per cui malgrado le incertezze, gli errori, le lotte continue nella sovrana scienza della ragione, la Filosofia, io consecrai ad essa più ore della mia vita.

Ed in vero quando io considero che tanti avvenimenti sociali, tante sciagure, tanti beni, tante violenze di opinioni, tanti benefizii, la stessa

barbarie e l'incivilimento, quando considero che tante verità scientifiche e tanti errori, che tante operazioni di arti belle ed industriose di bisogno e di diletto provengono in fine dall'esercizio di quella facoltà: non so trovare spiegazione dell'abbandono in che è lasciato quel nobilissimo studio, e perchè spesso al suo nome sorga noia o fastidio nella più parte delle persone anche colte ed istrutte.

Se le braccia degli uomini innalzarono superbe moli, appianarono monti, frenarono torrenti, qua e là circoscrissero il mare a determinati confini, se gli uomini domarono le naturali potenze ed a loro pro le rivolsero; le braccia dell'uomo, le fisiche sue forze realizzarono il progetto della mente. Nella mente è il centro di ogni atto che l'uomo adempie, ed ivi è la sede di ogni sua determinazione.

Per le quali meditazioni, più a modo di esercizio ed intramessa a' miei studii ordinarii, che a scopo di professare quella scienza, ho steso e letto qualche ragionamento, onde ne fu fatto e pubblicato qualche cenno. E più innanzi mi sarei sforzato di arrivare, se più tempo avessi potuto spendervi, se pel mio uffizio non fossi obbligato a studii più circoscritti, ad un esame di fatti esteriori della meccanica e dell'idraulica.

Quindi è che il titolo del lavoro che il Fusinieri ha letto all'I. R. Istituto, mi richiamò a seria attenzione, mi richiamò a quelle meditazioni a cui è proclive ed esercitata la mia mente: e a ciò fare mi spinsero due altri validi motivi: cioè primo il sapere che il distinto fisico oltre a filosofico acume combina l'incessante e severa consultazione dell'esperienza, l'altro che le cose trattate si attagliano al fondamento filosofico della scienza che professo.

La Memoria del Fusinieri mi ha suggerito alcune considerazioni, che messe in ordine, come meglio io sapeva, desiderai leggervi affinchè e l'autore dello scritto che le ha occasionate, e voi tutti abbiate a darne illuminato giudizio.

Nè, io credo, si vorrà considerare come inutile polemica queste discussioni, quando pure avessero a durare per qualche tempo, nè qui subito si fosse per districare il viluppo e pronunziare finale sentenza: che io sempre opinai, e meco deve pur opinare chi è sollecito del

progresso della scienza, doversi in argomento d'importanza come è questo in cui si riveggono i fondamenti delle fisiche dottrine, con tempo e diligenza schierare le ragioni, i motivi del pro e del contra, pesare uno per uno e con pazienza attendere, quando che sia, un giudizio definitivo.

Certamente che con questo giustissimo fine il Fusinieri, quasi solo contro a' fisici tutti, movendo da' primi principii, si accinse a contrastare l'usitata maniera di rappresentare, di commentare, di spiegare numerosissimi fenomeni e fatti della natura.

Dirò ancora che a discorrere sulle opinioni del Fusinieri, non a combatterle, chè tale parola ormai dovrebbesi sbandire dalla letteraria repubblica, e più che in altri tempi, in questo di pace per l'incivilita Europa, a discorrere, dico, sulle opinioni del Fusinieri mi confortò la natura della disquisizione come il medesimo titolo annunzia. Trattasi di esaminare quali conseguenze sono necessariamente collegate con idee ammesse e definite, piuttostochè di confrontare il lavoro della mente colle esteriorità, questione di pura logica; al che sento bastarmi alcune cognizioni di fisica di che mi trovo fornito.

L'indulgenza vostra che altre volte mi avete accordata, concedetela, vi prego, alla maniera da me tenuta nel trattare così degno subbietto; non la domando per la natura dell'argomento, che in se importante e sublime sforza ad attenzione, quando pure costasse fatica, ogni intelletto inclinato a pensare, a meditare.

Mettendomi adesso dinanzi a voi per esporre alcuni dubbii, dichiaro che ove il Fusinieri li degni ed onori di un commento, sarò pronto a farne quello studio ed esame che riputerò conveniente, essendo ben io persuaso che dopo il faticare di tanti uomini celebri in questa materia, dopo il lavoro del Fusinieri che a me pare non termini la questione, sebbene abbia mirato al centro all'essenza, sì presto non sarà da metter da parte la penna.

Della qual condizione di lungo e studiato confronto, comechè molti sieno per muover lagnanza, e per consigliarne l'abbandono dicendo non potersene attendere frutto corrispondente che valga a compensare il tempo e la fatica; io non mi sgomento, ed anzi mi riprometto certa

utilità, mentre nell'attrito e nel raffrontarsi delle opinioni, senza mai abbandonar il campo scientifico, la mente si esercita e rinfranca ed acquista potenza a trattare facilmente questioni meno complicate ed astruse.

Avverto per ultimo che la lettura dello scritto del Fusinieri fatta non è gran tempo all'Istituto e richiamata dappoi con estratto, mi fa presumere che ricorderete la sostanza di alcune proposizioni sulle quali discorro; e che desidero possa questo mio lavoro essere accolto nel medesimo Volume delle Memorie, affinchè il lettore col solo voltar qualche pagina abbia dinanzi le ragioni, quali sono letteralmente esposte, per poter giudicare.

Dai sensi ci vengono le idee delle cose esterne, i sensi c'ingannano, e poco ci rivelano della natura; le sensazioni non ci danno le vere idee delle cose, le sensazioni derivano da impressioni fatte sui nostri organi, impressioni che sono dissimili dagli oggetti che le producono. Su queste prime proposizioni del Fusinieri farò le seguenti considerazioni.

I sensi sono il mezzo per cui siamo messi in relazione col mondo esteriore. La sensazione, che il Fusinieri chiama fenomeno, è una maniera di linguaggio col quale i corpi esteriori manifestano al nostro essere le loro proprietà. Varrà a chiarir meglio il concetto di questa relazione, il contrapporre la manifestazione de' suoi pensieri che ne fa uomo sconosciuto, colla manifestazione delle sue proprietà che ne fa un corpo. Colla parola l'uomo arriva ad indicarci alcune intime e nascoste condizioni del suo animo; coll'azione fatta sui nostri sensi, quando è percepita dall'anima, siamo messi in relazione col corpo. Nel primo caso la condizione dell'essere a noi simile, la convenzione di linguaggio, ne mette anche a grado di perfetta conoscenza del suo interno, di ciò che non potremmo per altra via rilevare; nel secondo caso la condizione di essere da noi diverso ci arresta a quello che noi proviamo, o non avvertendola siamo spinti a dare a quel corpo le stesse facoltà e tendenze nostre.

Colla esperienza e colla osservazione aumentansi le relazioni col

mondo esteriore, e per questo medesimo fatto di molte modalità riconosciute, di che prima non aveasi pure presentimento, e pei salti e lacune che restano, noi concludiamo di sapere assai poco di quello che appartiene alla natura.

Comunque si possa dire giusta la lagnanza sull'imperfezione dei nostri sensi, perchè noi desidereremmo di vedere co'nostri occhi quanto si vede ora coll'aiuto di strumenti ottici, e più ancora; di avere l'udito squisito, sensibilissimo l'olfatto e che so io; dall'accusa di che i sensi furono gravati da alcuni filosofi, io li difendo col sostenere che i sensi non fallano, e che il fallo sta nella deduzione che fa l'anima. Per non andare alla lunga richiamerò quell'ordinario esempio del remo che appare rotto quando, messo obbliquo alla superficie orizzontale dell'acqua, in parte ne sporge. L'occhio riceve la sensazione della luce come se il remo fosse realmente rotto, l'anima da quel fenomeno visivo ritiene che vi si accompagnino tutte le altre condizioni che appartengono a remo rotto. Non è l'occhio che falla, è la mente che senza la verificazione di quegli altri caratteri, li ritiene. I filosofi che accusano l'occhio di errore dovrebbero anzi riconoscere in questa sua indicazione segnalato servigio, perchè desso nulla attendendo a quelle altre proprietà la cui conoscenza non è del suo ministero, fedele anche in questo caso, accetta quel linguaggio che è proprio della luce, donde venimmo alla scoperta di tante novelle proprietà.

Un uomo preso da itterizia o che ha ingoiato medicamento particolare da far apparire gialli gli oggetti, li giudica tali anzichè riconoscere un mutamento in se stesso: ecco un altro esempio d'errore dei sensi. Fingete invece, io soggiungo, che uomo il quale crede aver preso il medicamento di cui sa l'efficacia, sia tratto, senza saperlo, in una stanza addobbata artificiosamente a giallo, ed esso la crederà disposta al consueto, non gialla, attribuendo tal fenomeno alla attuale sua condizione; si dirà che fallano i sensi? E se nol si può dire in questo caso, facile analisi mostra che non è concesso il dirlo nel precedente.

Le sensazioni o fenomeni, dice il Fusinieri, sono dissimili dagli oggetti. Questa è proposizione che nulla insegna; poichè quella parola dissimili indica di natura diversa, e ciò è manifesto per la definizione

medesima di sensazione, che è apparenza di modificazioni nostre relative a cause che non conosciamo in veruna guisa.

E poichè discorriamo delle sensazioni, dirò qualche parola sui colori, sapori, odori. Il Fusinieri, con molti altri filosofi, ci avverte che dessi sono modificazioni de' nostri sensi, che non esistono fuori di noi. Alcuni filosofi, aggiunsero che i colori, sapori, odori sono nell' anima. In queste proposizioni vi è molto di vero: fa per altro meraviglia che tali filosofi, scrutatori della genesi delle idee e del linguaggio che le esprime, abbiano così poveramente commentato ed analizzato questo fatto ideologico. Sapore è certamente denominazione della nostra sensazione, di quella modificazione che in fine è prodotta nell'anima dall' impressione di oggetto esteriore; ma nel linguaggio, sapore è anche nome attribuito a quella modalità di causa esteriore che opera su noi quell'effetto. Quindi è che nell'ordinario linguaggio, e linguaggio che nulla ha di antilogico, si dice che una bevanda ha sapor acido, amaro, dolce, intendendo che ha la proprietà di produrre su noi certe modificazioni che si contrassegnano coi medesimi nomi. Accorderanno i filosofi che nel linguaggio descrittivo delle sensazioni e delle cause a cui le attribuiamo, sono due cose da esprimere, la modificazione o fenomeno, e la causa: domando io adesso quali sono le parole che le contrassegnano? Riducendo poi ad un solo ufficio quelle parole, non si avvidero di comporre certe frasi strane e ridicole. I colori sono nell'anima; il verde, il rosso, il giallo è nell' anima. I sapori sono nell'anima; l'amaro, l'agro, il dolce. Gli odori sono nell'anima; il fetido e la puzza. E perchè nell'uso comune e corrente s' impiegano quelle voci piuttosto nel secondo ufficio che ho notato, anzichè nel primo, quelle frasi corrispondono ad anima verde, rossa, gialla, amara, agra, dolce, fetida, puzzolente.

Se i filosofi non disprezzando il grossolano modo di comporre le idee e di esprimerle, quale si tiene dalla massa della gente, avessero di queste fatta raccolta ed analisi, assai meno lungi andrebbero da ciò che è reale e veritiero. Comunque indeterminati e confusi, sono pur sempre fatti ideologici, da non trascurare.

La fonte delle nostre cognizioni sta nel principio che dicesi di ana-

logia, o d'induzione, e ch'io attribuisco a facoltà dell'anima nostra che ho chiamato *credenza*. Tal principio di analogia, per dirlo in maniera familiare, sta in questo; le sensazioni simili o gruppi simili di sensazioni si attribuiscono a cause esteriori simili. Qui si che la parola *simile* ha netto significato derivando dal paragonare sensazione con sensazione che è della medesima natura, causa a causa della medesima natura. Le sensazioni sono i dati che abbiamo; la tendenza di attribuirle ad attività esteriori accenna alle cause; il principio di analogia dispone a gruppi queste cause, mettendo nella medesima classe e graduando quelle che corrispondono a simili sensazioni.

Si dirà, e fu già detto, che quel principio di analogia mena all'errore, e che la storia dell'umano spirito molti e molti ne ha registrato. Chi può negarlo? Io vorrei per altro che si facesse confronto tra i casi moltissimi ne' quali ci prestò e ci presta grandissimo servigio, con quelli in cui fu trovato in difetto. Si rifletta che in ogni passo che facciamo, in ogni nostra azione, in ogni uso degli oggetti esteriori approfittiamo di quel principio. Se muovo la mano al bicchiere che mi sta dinanzi, se l'accosto alla bocca e bevo, tutti quei fatti che furono presentiti per analogia, accadono realmente. La sensazione attuale simile a quella che altra volta ho attribuita all'acqua, mi fa pensare per quel principio, che corrisponda a causa attuale simile alla precedente, e ne attendo perciò lo sviluppo di analoghi fenomeni; il refrigerio, la cessazione della sete.

Quando si consideri, come si deve, l'incessante e sicuro servigio che ci presta quel principio nell'esercizio ordinario della vita, si avrà motivo di ammirare la sapienza del Creatore che mettendoci in mezzo di tante attività esteriori, ci ha dato una guida che mai ci abbandona. E quelli che ingrandendo e numerando i soli casi di errore, a che ne mena quel principio, sconfortati cercarono altri criterii, abbandonata quella sola face che potea mostrar loro il cammino, brancolando alla cieca, miseramente errarono per vaneggiamenti stranissimi.

Il Fusinieri parlando delle idee generali, e giustamente dicendo che non possono esistere nella mente col mezzo d'immagini, con troppa generalità attribuisce a tutti i logici la contraria sentenza.

Quando la mente si rappresenta l'idea di un oggetto, o, come dice il Galuppi, quando ha dinanzi un fantasma, quel fantasma è individuo, è un particolare, nè può riunire tutte le proprietà essenziali ed accessorie della idea che figura, nè avere le sole proprietà essenziali.

Il fantasma di triangolo sarà scaleno, isoscele od equilatero, in qualche maniera determinato nella sua grandezza; nè possiamo unire insieme le condizioni di uguaglianza e disuguaglianza ne' lati, nè possiamo limitarlo al carattere essenziale di figura conterminata da tre lati, escludendo la condizione di uguaglianza o disuguaglianza ne' lati. Se per altro al fantasma triangolo, quale che siasi, unisco la cognizione che tal nome gli appartiene non per la condizione di grandezza de' lati, nè manco per la sua estensione, ma soltanto per essere figura piana compresa da tre lati, potrò dire che ho il concetto esatto di triangolo in generale. E potremo ancora ritenere che alla sola parola *triangolo* corrisponda l'idea generale, ove sieno nette nella mente quelle condizioni essenziali.

Questa può essere la ragione onde il dott. Fusinieri asserisce che le idee esistono nella mente per mezzo di simboli, in quanto che il simbolo o fantasma o la sola parola, dà mezzo di avvertire quali sono poi i caratteri essenziali che convengono coll' idea generale.

Il Fusinieri vorrebbe che dai soli fenomeni si facessero deduzioni col raziocinio, e chiama ipotesi quelle supposizioni arbitrarie che riescono o fuori de' fenomeni o contro i fenomeni, o fuori o contro le legittime deduzioni che da questi si traggono.

Ricordiamo quello, in che interamente conviene il Fusinieri, che noi partiamo sempre dalle nostre sensazioni di numero grandissimo sì ma determinato, che desse non ci rappresentano se non la condizione temporaria delle attività esteriori sopra di noi, per sè nulla ci dicono di quello che non abbiamo provato, nulla di quello che accadrà in avvenire.

La legge dell'analogia che abbiamo avvertita ci sforza ad ammettere attività esteriori simili quando si presentano fenomeni simili e viceversa. Le nostre sensazioni, oltre a che diverse per natura, schieransi

in gruppi simili, ed in ogni gruppo si ordinano per intensità. Ma le gradazioni esperimentate sono sempre di numero limitato e permettono di ritenere che altre molte ve ne possano essere intercalate. La esperienza e l'osservazione sorregge e sostiene questa persuasione. Così distribuiamo per gradazioni anche le cause esteriori pertinenti ad un medesimo gruppo.

Il legame delle cause e degli effetti, quando ci fosse manifesto, ci metterebbe nella condizione di predire molti avvenimenti che interessano il nostro ben essere; noi tentiamo questa predizione col supporre quel legame che soddisfa ai fatti esperimenti, e questa è ipotesi. Il ricavare dalla legge stabilita nell'ipotesi, un caso particolare di legame, è ufficio del raziocinio.

Coll'esperienza sulla rifrazione della luce attraverso l'acqua si avrà raccolto il confronto di dieci, di venti, di mille angoli d'incidenza e di rifrazione, ma rimarrà ancora da sapere come si comporterà la luce quando penetra nell'acqua sotto angolo diverso da quelli. Ecco una gradazione di angoli d'incidenza, una gradazione di angoli di rifrazione. Nel confronto di quelli osservati si trova costante il rapporto dei seni, e si fa l'ipotesi che tale costanza sussisterà sempre.

Per quanto numerose sieno state le preziose osservazioni che Ticone specialmente ha lasciato al sommo Keplero, erano un nulla in confronto delle successive positure prese da Marte e dagli altri pianeti ne' loro movimenti in quel periodo di tempo e ne' tempi posteriori. Nella prima legge di Keplero vi è l'ipotesi che le posizioni osservate quadrando bastevolmente colla figura ellittica, il pianeta anche nei luoghi intermedii battesse quel cammino; nella seconda, che si estenda a qualsiasi area di settore la proporzionalità del tempo allo spazio, riconosciuta con sufficiente approssimazione nelle fatte osservazioni.

Malamente conchiuderebbesi che il Keplero non poteva supporre altrimenti da quello che indicavano le osservazioni. Le osservazioni sono limitate di numero; e molte e molte curve si trovano che corrispondono ad ellissi in più punti, molte leggi si trovano che collegano tempo e spazio, di maniera che alcuni rapporti tra spazio e tempo sieno uguali.

Tanto è vero poi questo, che nella storia della scienza per rappresentare l'andamento di alcuni fenomeni si è dovuto tentare più leggi, più ipotesi, quando i fatti ulteriori non quadravano con quelle che si erano assunte. E questo confronto fra i casi particolari indicati dalle supposte leggi coll'esperimento e coll'osservazione, quando riesca, ci fa dire che le leggi ritrovate sono le leggi della natura.

Anche qui torna in campo una lamentosa schiera di filosofi che piangono sull'infido appoggio delle ipotesi, di quelle ipotesi che menarono tante volte all'errore. Vero è che le pagine della storia della scienza sono piene di ipotesi che fallirono, di ipotesi che ostinatamente sostenute tardarono di anni, ed anche molti, il progresso intellettuale. Ma per questo che si ha da fare? Io non conosco altro mezzo per tentare la previsione del futuro nelle sue gradazioni di cause, e per ispiegare quello che avvenne.

Troppo lungi andrei se volessi, come pur toccherebbe, trattare alla distesa questo punto cardinale di filosofia.

Stando a quello che dice il Fusinieri ed alcuni filosofi, col principio di ragione sufficiente e con quello di contraddizione si fa tutto; sono principii di tale fecondità che da essi procedono tutti gli altri. D'altra parte ogni uomo, per quanto sia di ottuso intelletto, tostochè arriva ad intendere cosa significhino quelle parole con che tali principii si esprimono, risponde che niente di nuovo apprese; che sapeva ben egli anche prima di formale istruzione dovervi essere una ragione sufficiente, il perchè una cosa sia in tal modo piuttosto che in altro; che sapeva ben egli che una cosa non può nel medesimo tempo essere e non essere. Di tali aiuti filosofici non sa l'uomo che fare, avendo già sempre ricercato il motivo, la ragione di qualche effetto, ed assai di rado avendo peccato contro quel principio di contraddizione che il violare frequentemente sarebbe pazzia, ed avvertito l'errore anche innanzi che i filosofi modulassero quella proposizione.

Diffatti per naturale tendenza siamo tratti a ricercare la causa di tanti effetti, le condizioni di certi rapporti od elementi che li determinano tali e non altri. Siamo dunque naturalmente sulla via della ricerca, sulla quale ci porrebbe il principio di ragione sufficiente. Per

applicare il principio di contraddizione bisogna aver trovato qualche maniera di essere di una cosa per paragonarla con altra e vedere se combinano o ripugnano. Questo principio conviene applicarlo al termine della ricerca a modo di finale criterio. Così la filosofia che, come dissi, è la scienza della ragione, se avesse que' due soli principii, metterebbe l'uomo alla ricerca, e lasciandolo poi andare da sè, in fine gli darebbe quel criterio del principio di contraddizione per avvertire l'errore che avesse commesso.

Dinanzi ad uno specchio concavo è messo un oggetto, secondo quel modo che nella catottrica si adotta per indicare il cammino del raggio luminoso che batte e rimbalza, modo che dicesi la riflessione, si annunzia che i raggi riflessi hanno da formare un'immagine dinanzi lo specchio. L'è in fine una proposizione di geometria che ha da procedere tutta razionalmente. Ma qui si domanda al filosofo, che si attiene al principio di contraddizione, se questo principio vi si opponga o no. Ecco un caso, e tanti altri se ne potrebbero addurre, a' quali non così facilmente si può applicare quel principio.

Vero è che i filosofi i quali sono persuasi della fecondità di quel principio, diranno doversi applicare passo a passo e non attendere a far questo dopo lunghissimo viaggio. Bell'aiuto in verità! dare un criterio per riconoscere se il passo è falso quando è fatto e nulla occuparsi della maniera di farlo giustamente, nel che starebbe propriamente il buono della filosofia. Nè accagiono la filosofia di questa mancanza, ma quei filosofi che videro tanto ausilio in quella sentenza od assioma, perchè nella più parte de' ragionamenti si vede come sieno comprese le illazioni nelle premesse, e molto si è fatto senza l'applicazione magistrale di quel principio.

Asserisce poi il Fusinieri che i due esposti principii servono ad evitare l'errore e l'immaginario, ciò ch'è contrario e ciò ch'è fuori dei fenomeni. Non so come possa avvertirci dell'errore il principio di ragione sufficiente, che solo ne insegna, quanto l'uomo sa diremo istintivamente, dovervi essere un perchè una cosa sia in tal modo piuttosto che in altro, cioè un motivo e bastante a produrre quel modo. Se avesse detto soltanto che il principio di contraddizione ne fa evi-

tare gli errori, acconsento; ma per ciò ch'è contrario e fuori dai fenomeni, lo nego. Il principio di contraddizione si applica all'andamento intellettuale, alle idee, e quivi pure con iscarso effetto, non mica alle cause dei fenomeni. Quel criterio ne mostrerà anche doversi rigettare una conseguenza se contraria alla ipotesi che abbiamo fatto, ai dati che abbiamo assunti; ma nol potremo applicare nel confronto tra il modo dedotto col ragionamento, e quello che l'esperienza e l'osservazione insegnano.

Ponete ch'io finga la luce degradare nell'inversa della distanza, e qui già intendo per misura di degradazione l'andamento dei fenomeni come si rivela cogli strumenti che adopriamo, per non impigliarmi in altre questioni; domandando di che intensità sarà l'illuminazione portando l'oggetto luminoso a quadrupla distanza, si trova con tutta agevolezza, come vedete, che si ridurrà alla quarta parte. Qui il principio di contraddizione non è per niente offeso, non ne può avvisare di errore, chè la nostra conclusione è giustissima. Confrontata la conseguenza col fatto non quadra, l'illuminazione operata è assai minore della quarta parte, vi vogliono assai più di quattro lumi per produrre una luce egualmente intensa di prima. Il principio di contraddizione ne assicura che stando all'ipotesi dell'intensità nella ragione inversa della semplice distanza si arriva a quella conseguenza che fu detta; il fatto vi contrasta, e perciò il fatto è contrario all'ipotesi.

Potrebbesi anche dire che noi rigettiamo l'ipotesi pel principio di contraddizione, mentre intendiamo l'intensità della luce, per non discostarmi da quell'esempio che ferma la nostra attenzione, non poter essere ridotta alla quarta parte per quanto ne dice la deduzione, ed a minore intensità per quanto ne porge l'esperienza; altrimenti quell'intensità di luce dovrebbe essere nel medesimo tempo la quarta parte di prima e non esserlo. Quando abbiamo fatta l'ipotesi, si è già dichiarato doversi questa ritenere se le conseguenze legittimamente dedotte quadrano coll'esperienza, doversi rigettare se le conseguenze legittimamente dedotte contrastano o deviano dal fatto. Perchè poi vi è un'altra osservazione da fare sul principio di contraddizione: desso m'annunzia che una cosa non può essere e non essere nel medesimo tempo,

e su questo niente vi è a ridire; ma il principio di contraddizione mi sbriga nella decisione di quella vertenza? la cosa è o non è? L'uomo che contrastasse in sè per sapere se una conseguenza sia giusta o lo sia l'opposta, poco servigio trae da quel principio che l'assicura non potersi adottare contemporaneamente tutte e due. Ciò sapeva egli anche prima, questo anzi è il motivo che lo tiene sospeso nel sentenziare, egli ricerca un criterio per appigliarsi all'una od all'altra, e con sicurezza.

Fra le definizioni di sostanza io adotto quella che è preferita dal Fusinieri, sostanza è soggetto dotato di forza attiva; ed è per maggiore chiarezza soltanto che io dichiaro risguardare la nota di attività come una nota caratteristica, senza dire che siasi per tal maniera definita e stabilita l'essenza di sostanza. Così per corpo intendo insieme al Fusinieri soggetto esteso dotato di attività. Veramente egli lo definisce per *substantia extensa vi motrice praedita*, lo che importerebbe la seguente frase *corpo è soggetto dotato di forza attiva esteso dotato di forza motrice.* Comunque siasi in fine, il Fusinieri riconosce nel corpo le due note caratteristiche di estensione ed attività; e queste due note formano le premesse dalle quali col ragionamento si vorrebbero cavare tante conseguenze.

Dice che quella definizione è secondo i fenomeni, cioè secondo la maniera con cui i corpi si manifestano a noi; nè può essere altrimenti, chè una definizione della essenza del corpo ci manca.

Secondo me le tre idee, spirito, corpo e spazio sono determinate per queste note: lo spirito è attività senza estensione, il corpo è attività con estensione, lo spazio è una estensione senza attività.

Dalla definizione di corpo col principio di contraddizione il Fusinieri dimostra l'impenetrabilità, poscia con quello di ragione sufficiente dimostra la comunicazione di moto da uno ad altro corpo. Andrei troppo a lungo volendo quivi mostrare come sieno manchevoli quelle dimostrazioni, farollo ad altro tempo; qui intanto prendo come dimostrato che il conflitto o conato del primo corpo di occupare il luogo del secondo sia causa necessaria di comunicazione di moto, che è quello cui tende tutto quel discorso.

Ogni corpo, secondo il Fusinieri, in quanto è sostanza, è in continua mutazione di stato interno, perchè la sostanza ha questo attributo anche per azione propria.

Sogliono i filosofi distinguere una facoltà in potenza ed in atto. Se quella condizione di forza attiva messa nella definizione di sostanza vuol egli che rappresenti una facoltà in atto, può dire senz'altro che la sostanza è in continua manifestazione di attività; se poi, come si deve, non si obbliga quella facoltà ad essere incessantemente in atto, cade la sua proposizione.

Non poteva poi egli assegnare al corpo come sostanza quella condizione di incessante esercizio di sua attività, mentre ha detto da principio che noi non abbiamo le vere idee dei corpi, e l'ammettere quel continuo lavoro è una ipotesi la più ardita e generale che immaginare si possa.

Più avanti asserisce che senza moto non si può concepire che vi sia produzione di moto, e perciò sentenzia di assurde quelle attrazioni a distanza che i fisici risguardano quali forze primitive de' corpi. Il progresso del discorso deve essere tutto razionale; nella premessa definizione di corpo si ha da trovare l'incompatibilità dell'azione a distanza. Ora in quella definizione abbiamo due elementi, estensione ed attività. Nell'estensione non può trovarsi condizione di movimento o non movimento, chè questo appartiene alla attività. Nell'attività, presa così in generale, niente ripugna che un corpo operi a distanza una modificazione sopra altro corpo, modificazione che si risolva in moto.

Ma poichè nell'originale sua definizione, il Fusinieri usa delle parole forza attiva, e per forza intende poi la ragione sufficiente del moto; l'assurdo ch'egli trova nell'ammettere l'azione a distanza starebbe nella proposizione, che il corpo dotato di estensione e di ragione sufficiente del moto attiva, non può operare il movimento sopra altro corpo a distanza.

Domando se quella attiva ragione sufficiente del moto nel corpo risguarda il moto di sè stesso, od il moto che può ingenerare in un altro. Se assume il primo ristretto significato, manca nella definizione di corpo la ragione sufficiente di comunicazione di moto in qualsiasi caso;

e se poi comprende anche il moto che può produrre in un altro, siccome niuna condizione vi è di distanza, non ne conseguita per niente quella conclusione che accenna. Condizione di distanza non è nella espressione di ragione sufficiente di moto, ed a meno che non si ricomponga la definizione, si può concepire possibile l'azione a distanza.

Dal qual esame si viene a quest'altra conseguenza tutta opposta a quanto dice il Fusinieri. L'assurdo considerato logicamente come qui dee farsi, stando nel campo dell'esame delle illazioni colle premesse, consiste nell'ammettere che una cosa sia e non sia nel medesimo tempo. Quando io pronuncio una illazione contraria a ciò che ho stabilito nelle premesse cado in assurdo, mentre coll'illazione dico che quello che ho riconosciuto nelle premesse non può essere. Ma è pur assurdo il sostenere che un'illazione è necessariamente esclusa dalle premesse quando queste in fatto non la escludono, mentre in fine è asserire che una cosa sia e non sia nel medesimo tempo. Ridotte le cose a questo punto, è facile vedere essere assurdo il dire che l'azione a distanza sia incompatibile colla definizione di corpo, mentre in questa nulla vi è che ripugni a quella maniera di azione.

Difesa dalla taccia di assurdità l'opinione emessa da alcuni fisici che possa aver luogo l'attrazione a distanza, anzi fatto vedere che nelle note caratteristiche di corpo niente vi è che vi si opponga, di guisa che è assurda la contraria sentenza che vorrebbe sostenere l'impossibilità fondandosi su quei dati; rimarrebbe l'esame analogico, che è il più fruttuoso, quello che nelle fisiche ricerche è guida utilissima ad ottenere la probabilità maggiore di verità nello stabilire le proposizioni. Se non che e per questo argomento e per altri che si presentano nel lavoro del Fusinieri ci riportiamo ad altro esame, limitandoci in queste considerazioni a guardare l'andamento logico delle proposizioni che si vorrebbero dedotte razionalmente, cioè per necessaria illazione, da alcune premesse.

Non mi sono fermato ad analizzare la dimostrazione del Fusinieri che nel conflitto de' corpi abbia necessariamente a seguire la comunicazione di moto, perchè quand'anche si ammetta giusta, che non lo è, sa ognuno esser mestieri dimostrare anche l'inversa che il moto deve essere ori-

ginato dal conflitto. E quello che va qua e là dicendo per negare poi possibile l'azione a distanza, ho lasciato per non perder tempo, e dirittamente mi riportai alle note caratteristiche di corpo da cui in fine deve cavarsi, se si potesse, quella conseguenza.

Affinchè poi non sorga dubbio che quella accusa di assurdità in chi crede possibile l'azione a distanza non vada esaminata sotto il punto di vista logico, farò notare che più innanzi aggiugne che i fenomeni, come vengono dai sensi, mostrano quell'attrazione senza conflitto, e che coll'intelletto si comprende non potervi essere moto senza conflitto.

Poi cambia faccia alla dimostrazione mentre accusa i fisici di aver ammessa l'azione a distanza negando che vi sia mezzo di comunicazione, che potrebbe esservi quantunque a' nostri sensi attualmente non si manifesti. Questo errore, a dir vero, è assai meno grave della colpa che avrebbero commessa sbagliando il ragionamento e cadendo nientemeno che in contraddizione. Che sia possibile l'esistenza di un mezzo di comunicazione, che sia più o meno probabile, niuno vi sarà che lo contrasti; ma quest'è argomento ben diverso da quello che abbiamo finora trattato. Dissero mai i fisici che sia impossibile un mezzo di comunicazione fra corpi che appariscono agire a distanza? Se l'avessero detto fondati sulla definizione di corpo che prendemmo a fondamento del nostro ragionare, sarebbero caduti nell'assurdo, ritenendo in quelle premesse contenuta l'impossibilità di un mezzo di comunicazione, impossibilità che non può dedursi.

Quanto poi aggiugne sulle proprietà da lui discoperte nella materia attenuata, questo non ha che fare coll'andamento razionale di puro ragionamento logico che noi esaminiamo.

Avvertirò soltanto una cosa, che il suo principio della emanazione per raggi di materia in ogni corpo, comunque possa essere vero e fecondo, è una ipotesi, una supposizione. Perchè qui non si tratta di aver osservato queste emanazioni in alcuni casi e per analogia di ritenerle in casi simili; egli parla di emanazioni sì tenui da superare ogni nostra immaginazione. Ecco imperfezione dei sensi ed intemperanza di voler sapere al di là dei fenomeni che trae anche il Fusinieri a quelle supposizioni che condanna.

Passando a trattare della divisibilità de' corpi, stabilisce che la materia è attualmente divisa in parti di parti indefinitamente. Quella parola *indefinitamente* meriterebbe essere ben dichiarata. Noi non possiamo neppure collo sforzo più intenso della fantasia, rappresentarci la moltitudine delle parti in che alcuni corpi possono dividersi; ma che la divisione attuale della materia non sia suscettibile di limite, questo non si deriva certo dalla nostra definizione di corpo. E torno sempre a quel concetto, dal quale solo si può razionalmente venire alle conseguenze ora esaminate.

Una parte dello spazio è occupata da un corpo, cioè in quella estensione che appartiene allo spazio si manifesta un'attività, per cui si dice ch' ivi è un corpo. Se da qualsiasi punto di quella estensione possiamo immaginare che si passi ad un altro con continuazione di quella attività che appartiene a quel corpo, diremo che il corpo è intero; se poi ne toccherà di trovare mancanza di continuazione di quella attività, diremo che il corpo è diviso in due o più parti. Ora niente contrasta alla definizione di corpo che vi sia quella continuità, e perciò niente contrasta ad una limitata attuale divisione della materia.

Mi sono ingegnato di dare una definizione di corpo intero, e diviso in parti; definizione che il Fusinieri mancò di dare, sebbene richiesta dal giusto andamento logico; come nella trattazione del conato usò delle parole massa ed elasticità senza darsi la pena di precisarne il significato. Nelle ordinarie questioni si può senz'altro usare di alcune parole nel significato ammesso generalmente; ma in una trattazione razionale, dove si tenta di assegnare i limiti estremi di alcune conclusioni, il filosofo ha l'obbligo di definire nettamente le sue idee per ragionare con giustezza.

Non contento il Fusinieri di una dimostrazione, con un sillogismo vuol provare per altra guisa il suo assunto della divisibilità della materia senza limite. Ogni corpo, dic' egli, è divisibile in parti, le parti sono pure corpi e quindi divisibili. Io non concedo la maggiore, non concedo cioè che ogni corpo sia divisibile, qualunque sia la sua esiguità; ammetto che quella proprietà riscontrata in corpi soggetti ai nostri sensi, o che indirettamente si esperimenta, abbia un limite. E

diranno il medesimo quelli che ammettono gli atomi, e devono farlo, non potendo sfuggire, a chi ha un po' di criterio, che dalla maggiore assunta dal Fusinieri ne verrebbe una contraddizione pel sistema atomistico.

Doveva pur notare il Fusinieri che la maggiore del sillogismo o riposava sull'analogia o sopra ragionamento. L'analogia fondata sopra grandezze sensibili de' corpi potrà spignersi anche ad indefinita applicazione della medesima proprietà, senza formare per altro una verità apodittica da far cadere in assurdo chi non la riconosce. Il ragionamento ha da basare sopra qualche altro principio, ma egli no 'l riporta. Perciò dall'esame del sillogistico discorso si raccoglie, non esservi alcuna contraddizione nel risguardare i corpi divisibili fino a certo limite, il quale può oltrepassare ogni nostra immaginazione.

Il Fusinieri passa a sostenere che sono caduti in assurdo i fisici e chimici tutti, i quali ammettono gli atomi, vale a dire corpicelli minimi indivisibili per le attività che sono in natura.

Primamente vuole che sieno indivisibili di loro natura, poi dice che sono corpi e quindi hanno parti, dal che ne verrebbe che queste sarebbero fra loro coerenti per forza infinita, o per forza superiore ad ogni forza naturale e quindi miracolosa.

Se gli antichi intesero per atomi, corpicelli minimi indivisibili per loro natura, cioè tali che fosse impossibile il separarli in parti, non è dovere dei moderni di starsi a quel concetto. I moderni li definiscono meglio con ritenerli indivisibili relativamente alle forze che sono in natura, quantunque sieno estesi, perchè in fine sono corpi.

Il Fusinieri obbietta che hanno parti. Per aver parti io intenderei che il corpo sia la riunione di altri corpi minori, ovvero che lo si possa separare in corpi minori, o finalmente che si considerino quelle parti che corrispondono alla divisione dello spazio in che il corpo è collocato. Per quanto io vi pensi non trovo altro significato della frase, un corpo ha parti. Gli atomisti non ammettono nè il primo, nè il secondo significato; quanto al terzo non contrasta colla indivisibilità di quel corpo, importando solo quel concetto la divisibilità dello spazio. Un cubo di ferro è messo ad occupare il posto di otto cubi minori di legno:

io separo colla mente quelle parti del cubo di ferro che andarono ad occupare il posto di ciascheduno de' cubi minori; vuol dire questo che tal cubo è diviso od è divisibile? pare a me che no.

Esaminiamo anche la necessità di quella forza miracolosa. I corpi esteriori agiscono sull'atomo per dividerlo, e questo resiste; diremo che la sua attività è superiore alle forze che tendono a frangerlo: ma queste forze non sono infinite, chè non ammettiamo in natura tali agenti; dunque neppure fa mestieri ammettere infinita la forza d'indivisibilità dell'atomo. Nè adoprerei in questo caso la parola coesione o coerenza, nel di cui concetto entra la condizione di corpi minori che si attengono quasi prima fossero separati; concetto giustissimo nell'ordinaria contemplazione delle naturali cose, insufficiente o falso per quell'estrema picciolezza di corpi ne' quali neghiamo la divisibilità.

Se non che una forza superiore ad ogni altra della natura è detta da ognuno miracolosa; e, secondo il Fusinieri, sono perciò costretti gli atomisti di ricorrere ad un miracolo, per rendere possibile il loro concetto.

La considerazione sarebbe giusta se gli atomisti non riconoscessero gli atomi in natura, se mettessero fuori della natura le forze che si oppongono alla loro divisione. Poniamo che nella natura sieno mille le forze e che una soverchi le altre; questa sarà superiore a tutte le altre forze naturali, ma si dovrà perciò dire miracolosa? no certamente, perchè prima si è detto che anch'essa è una forza in natura. Se fuori delle mille sorgesse una forza capace di vincere anche la più gagliarda, quella sì che dovrebbe dirsi miracolosa. Donde si arriva a quest'altra conclusione, che secondo gli atomisti vi vuol un miracolo a rompere un atomo, non un miracolo perchè desso sia tale.

Continua il Fusinieri a trovare nel concetto d'indivisibilità degli atomi tante idee che chiama immaginarie, li vuole duri assolutamente, e questo senza causa naturale, continui uniformemente nel loro interno, figurati senza causa, massa proporzionata al volume, inattivi di dentro, attivi al di fuori per conflitto de' corpi duri, ed attrazioni reciproche in essi senza causa.

Tutto questo deve saltar fuori dall'idea di corpo indivisibile, per-

chè, il ripeto, qui siamo nel campo logico della razionalità, non in quello della analogia per quanto vuole il medesimo Fusinieri.

Le note caratteristiche di estensione, attività, indivisibilità non menano a veruna di queste conseguenze da lui indicate. Posso immaginare, senza contraddire a quelle premesse, che un atomo si allarghi e ristringa, che in tutti i sensi non sia continuo, posso supporre atomi di figure diverse. Quanto alle attrazioni reciproche, è questa una qualifica di loro attività o piuttosto di una fase di loro attività, che non mena certo a contraddizione.

Una curiosa opposizione fa ancora il Fusinieri agli atomi, ed è che non avrebbero ragione sufficiente di trovarsi ne' luoghi occupati da essi piuttostochè in altri. Ma io trovo che vi è abbastanza di ragione sufficiente nell'azione che soffrono per parte degli altri corpi, ne' quali ammettendo attività si ha quanto occorre a spiegare la differente situazione nello spazio di due o più atomi.

Tocca adesso di esaminare le assurdità imputate dal Fusinieri ai fluidi imponderabili od imponderati che dire si vogliano. Ammettendosi attrazione fra que' fluidi, dic'egli, e gli atomi della materia ponderabile, e ripulsione fra le particelle di quei fluidi, si creò il mondo stando a tavolino. Onde ne verrebbe che Volta, Franklin, Fresnel, per non menzionare altri illustri cultori delle scienze, stavano a tavolino e con sogni crearono il mondo.

Anche la luce, ricorda il Fusinieri, era considerata un fluido imponderabile, anzi ammetteasi la mescolanza di tanti fluidi quanti i colori. È vero che si ammetteano molti atomi luminosi per ispiegare i varii colori. La teorica della luce mostra come quelli fra i fisici, che sono veri filosofi, sieno persuasi essere le ipotesi necessarie per descrivere i fenomeni e, quello che importa assai più, per segnare le leggi di loro gradazione e la gradazione delle cause a cui si riportano; e doversi una ipotesi abbandonare allorchè una novella spiega più fenomeni e toglie le numerose difficoltà della prima. Il sistema delle vibrazioni, oltre a che spiega a rigore di calcolo tanti fenomeni che quello dell'emissione non ispiegava, ci libera da quella moltitudine di atomi rossi, gialli e via dicendo, ed il fenomeno mirabile dei colori è

reso simile a quello dei suoni. La stessa aria, commossa diversamente, porta all'orecchio la sensazione del grave e dell'acuto per isvariate gradazioni, il carattere e l'intensità diversa di tuono; l'etere, commosso dai corpi luminosi, porta all'occhio la sensazione del rosso, del violetto ed innumerevoli gradazioni di colori che vi sono di mezzo. Pure a questo sistema delle ondulazioni, ch'è gloria somma del nostro secolo, si oppone il Fusinieri per attenersi a quello dell'emissione, e solo in luogo di una materia particolare vuol egli considerare nobilitata e resa luminosa la ordinaria che si tocca, si palpa e si calpesta.

Nè taccio di una difficoltà che fa il Fusinieri alla ipotesi delle sostanze o fluidi imponderabili, volendo egli che si mostrasse l'esistenza loro, che si trovassero isolate dalla materia. Tale esigenza è un po' strana in un filosofo che ha confessato dalle prime righe del suo lavoro, e ripetuto dappoi, che ci mancano le vere idee delle cose, che noi siamo condannati ai fenomeni. Appunto perchè i fenomeni luminosi, quelli di calorico, di elettrico, e magnetico si scostano fortemente da quelli che appartengono alla materia da noi detta ponderabile, si attribuiscono a sostanze diverse da quella.

Stabilire che non si possa conchiuderne l'esistenza se non pel mezzo di fatto, pel solo mezzo di toccarla e palparla, di separarla, in guisa da poter dire qui è materia ponderabile, e qui è solo elettrico o sola luce, contrasta col metodo razionale ed analogico adoperato in tante altre ricerche filosofiche. Perchè si potrebbe andare più innanzi colla stessa esigenza, e dire, che per assicurarsi della esistenza dell'anima umana, è necessario di averla isolata dalla materia che compone il corpo.

Lascio di addurre molte ragioni che favoriscono l'ipotesi ammessa dalla comune dei fisici, anzi da tutti: e quando colla ipotesi della materia attenuata si avrà spiegato tutti i fenomeni de' quali ora si parla col linguaggio degl'imponderabili, i fisici, che sanno non essere verità apodittica l'esistenza di quei fluidi, si volteranno certamente alla nuova ipotesi che ci sbriga di sostanze novelle. Tale è sempre il vero andamento analogico nella filosofia delle scienze sperimentali.

Nella proposizione del Fusinieri, che la fluidità di quei corpi non può essere primitiva, manca la definizione di *stato primitivo*. Non

saprei se intendesse lo stato in cui erano appena creati da Dio. Che se, dicendo egli stato primitivo, vuol esprimere la condizione delle ultime particelle che in cumulo unite formano un fluido aggregato; dirò che gli atomisti guardano ogni particella come un solido, nè vi attribuiscono il carattere di fluidità che racchiude la condizione di separazione, di facile divisibilità.

Contrastando egli a quei corpi la condizione di fluidità, doveva pure occuparsi di darne una definizione, onde almeno dalle note caratteristiche che vi metteva, fosse dato di trovare una contraddizione nell' ipotesi. Ora siccome dai fisici si dà il nome di fluido a quell'aggregato di particelle minime la di cui grandezza sfugge ai sensi, e che per non essere rattenute da vincolo di coesione scappano e fuggono con grandissima mobilità da ogni banda, pare giustissimo di aver messo tra questa classe di corpi la luce e gli altri imponderabili.

Oppone ancora che il calorico dotato di forza ripulsiva, ossia, io dico, qualificato nel concetto generale di attività con modalità di ripulsione, abbia a starsene fra gli atomi della materia ponderabile allo stato latente, e non piuttosto debba esso spargersi nello spazio. Sa egli bene, e l'ha detto, che i fisici, lontani dal commettere tali grossolani errori, ammisero fra la materia ponderabile ed il calorico attrazione, tendenza a riunirsi, e che perciò il calorico può essere imprigionato, per così dire, sino a certa quantità. Nella chimica abbiamo simili andamenti; una base ed un acido quando sono in saturazione nascondonsi a vicenda, onde l'acido non manifesta molte delle sue proprietà; ma quando l'acido soverchi, ecco tosto dar segno di sua libertà col presentare i fenomeni che gli appartengono.

Le accuse poi che dà all' ipotesi degli atomi di luce, di calorico e via dicendo, le abbiamo ribattute abbastanza precedentemente. Il qualificare l' attività generale del corpo colla forza ripulsiva fra gli atomi della medesima natura, colla forza di attrazione per altri, non è condizione che implichi contraddizione colla indivisibilità di minime estensioni godenti di quelle proprietà, ed a questa conseguenza noi esclusivamente miriamo colle attuali considerazioni.

Il Fusinieri annunzia che i fisici sembrano attualmente ammettere

un solo fluido, l'etere, e che con esso vogliono spiegare tutti i fenomeni che prima si attribuivano agli imponderabili. Primieramente dico che questo non è vero assolutamente, e che non sia vero si rileva dai Trattati e dagli scritti della più parte dei fisici: i fisici sono più guardinghi di quello mostra il Fusinieri. Desiderio lodevolissimo di ricondurre tanti effetti ad una causa sola, li muove a notare quelle analogie che potrebbero verificare un sospetto. Ciò si fa dalla massima parte dei fisici che usano, com'è dovere, del principio d'induzione. Nè credo sia conveniente parlare a quel modo di tutti i fisici, e della fisica teoretica in generale, quando fosse opinione di qualcheduno soltanto: altrimenti, con eguale ragione, potrebbe dirsi che sonosi abbandonate le ipotesi di tanti fluidi imponderabili e sostituita la materia attenuata, asserzione falsa.

Dice il Fusinieri che a quell'etere si danno tante e tante vibrazioni, oscillazioni, ondulazioni; poteva dire con giustezza che a spiegare i fenomeni della luce si ammette che il movimento dell'etere si rassomigli a quello dell'aria nel suono, a quello dell'acqua nelle onde, a quello dei corpi solidi quando vibrano.

Desidererei solo che il Fusinieri spiegasse co' suoi principii i due fenomeni meravigliosi indicati dal calcolo all'Hamilton e verificati dal Lloyd, del raggio luminoso che attraversando un cristallo in certa positura sorte a cilindro cavo, del raggio luminoso che sotto altre condizioni se n'esce a cono cavo, e questo senza ammettere le vibrazioni nella luce od etere, che col suo movimento genera le sensazioni della luce, ma col principio della emissione.

Se non che mi lasciai trasportare nelle analogie abbandonando il campo logico, che riprendo ancora per poco onde dar termine a queste mie considerazioni.

Il calcolo, continua il dott. Fusinieri, non serve a determinare le cause fisiche dei fenomeni. Se qui per determinare s'intende che il calcolo dica quali sono le cause, confesso che non arriva a tanto. Non si arriverà mai, chiamando x la natura del calorico, a trovare quell'x bello e determinato da una equazione. Il calcolo serve a tirar giuste le conseguenze, anche difficili e complicate, da una ipotesi che siasi

ammessa; è un ragionamento che si fa con algoritmo, con metodi particolari; sicuri pel cammino che si batte, sicuri per le molte conferme che si presentano.

Appunto per questo, il calcolo è di grandissimo aiuto nella fisica che tratta delle naturali cose create da Dio *in numero, pondere et mensura,* quantità che formano il soggetto della matematica. Fate una ipotesi sulla gradazione delle cause, perchè altrimenti la matematica non vi entra, e dessa vi caverà fuori da alcuni dati la gradazione particolare che tocca. Quando poi avremo nel confronto col fatto molte conferme di quella legge di gradazione, potremo tenerla per legge di natura.

Il calcolo, per esempio, non s'imbarazza nel definire la natura della causa dell'avvicinamento a cui tende la materia ponderabile; ma dalla gradazione supposta da Newton della proporzionalità colla massa, dell'inversa del quadrato della distanza, il calcolo ci ha regalati della meccanica celeste.

Leggi di gradazione sono nell'ottica trattata col metodo della emissione, leggi di gradazione sono nell'ottica trattata col metodo o sistema delle vibrazioni. Il calcolo ha condotto le prime a concordare coi fenomeni fino a certo punto, dopo il quale non potè riuscire; il calcolo ha condotto le seconde leggi assai più avanti, a scoprire fenomeni neppur sospettati, che l'esperienza conferma meravigliosamente. In queste leggi di gradazione non entra per niente la proprietà di attrazione vicendevole fra le particelle della luce, quella che è comune a tutta la materia ponderabile; quindi è che il calcolo non qualifica la natura producente su noi i fenomeni della luce, ma si sviluppa in conseguenze, senza che vi sia mestieri di quella proprietà della vicendevole attrazione delle particelle che appartiene alla materia ponderabile, anzi escludendola.

Le vibrazioni, dice il Fusinieri, sono senza causa. Veramente i fisici ammettono una qualificazione nell'attività generale riconosciuta ne' corpi; e quando si tratta della luce ammettono una modalità di ripulsione, ed ammettono che operi proporzionalmente alla distanza. Spostate le particelle di luce, o diremo dell'etere luminoso, fanno come un pendolo che si scosta dalla verticale, compiono de' movimenti oscil-

latorii che si propagano per onde ora uniformemente, ora in maniera diversa, secondo che la condizione di quell'etere è omogenea o no.

Poteva dire il Fusinieri improbabile quella causa, od altro che io non saprei, ma non già che i fisici avessero ammesso così all'ingrosso vibrazioni senza causa; sapendosi bene da ognuno che senza causa è la sola causa prima da cui tutte le altre ebbero la loro esistenza.

Siamo alle ultime assurdità notate dal Fusinieri. Egli dice che in fisica s'è introdotta ultimamente una stranissima moda di filosofare. Scoperta una classe di fenomeni che non si sa spiegare (cioè ridurre, io dico, a cause di fenomeni conosciuti), alla causa occulta si dà un nome tolto dal greco, e si crede aver aumentata la scienza. Osservo prima che questo andamento non è recente, ma vecchio assai; tanto è vero che con tal metodo, come dice il Fusinieri, tornansi alla moda le qualità occulte degli scolastici.

Pare a me che il rimprovero doveasi dare in altro modo. Scoprire una nuova serie di fenomeni è sempre buono per la scienza, e la scienza per questa parte sarà riconoscente al Fusinieri, che colla sua attività e diligenza ha trovato alcuni curiosi e rari fenomeni. Dare un nome a quella causa, non mi pare sia riprovevole; già quel nome ricorda solo un gruppo di fatti che non si sanno riportare a cause di azione conosciuta. Quel nome unifica, per così dire, que' fenomeni simili, li comprende in un gruppo e, se non altro, si avrà certamente il vantaggio di sbrigarsi con una sola parola quando occorre di nominarli.

Sarà male di starsene a quella parola senza indagare la possibilità di riunire quel gruppo ad altro o ad altri di origine meglio determinata.

Il rimprovero che si meritano i fisici quando così facciano, è di dare a spiegazione d'uno di quei fenomeni il nome della causa occulta. Qui sì che convengo pienamente col Fusinieri e con lui mi unisco a gridare fortemente contro un tal abuso, abuso per altro frequente in molte scienze naturali, raro nella fisica.

A chiarire meglio questa osservazione scendiamo ad un esempio:

un uomo e più uomini guardandosi nello specchio veggono la propria immagine, e l'attribuiscono ad una causa che chiamano ripercussione della propria fisionomia, o con una parola sola foggiata dal greco, che qui non importa. Domandato poi uno di questi perchè affacciandosi allo specchio si vede la propria immagine, se rispondesse per la ripercussione che è nello specchio della fisionomia posta davanti, non darebbe certo spiegazione; chè messa a luogo di quella parola relativa alla causa la sua definizione, torna una proposizione identica.

La filosofia è campo vastissimo e fecondo, e qui mi sentirei tratto all'esame di quella opinione emessa da molti filosofi che tutto abbiasi a ridurre al principio d'identità. La riserbo ad altro momento per non abusare, malgrado l'importanza degli argomenti, della vostra indulgenza.

Tornando al precedente soggetto, dico che la spiegazione suppone una legge di gradazione nella causa operante, od una legge di relazione fra causa e causa, e che quando si cava da quelle leggi un fenomeno particolare ch'ebbe luogo, si spiega; come quando si cava un fenomeno particolare che poi si verifica, si fa predizione.

Dalla legge di riflessione della luce, da quella semplicissima legge di uguaglianza tra i due angoli d'incidenza e di riflessione, si cava che i raggi cadenti su d'uno specchio piano e ribattuti, si dispongono come provenissero da punti al di là dello specchio. L'occhio adunque riceve quei raggi come si spiccassero da oggetto, e questi fanno impressione analoga a quella che sorgerebbe dalla vista dell'oggetto reale. E poichè l'occhio, fedele ministro delle impressioni della luce, non bada agli altri fenomeni che accompagnano l'oggetto reale, lascia all'anima il giudicare; e questa se non confronta quei soli dati dell'occhio con gli altri soliti ad accompagnarsi alla presenza di oggetto reale, è tratta in errore. Ma quando l'anima avverte potersi separare le impressioni dell'occhio da quelle degli altri sensi, come qui accade, dà un nome a quel solo gruppo e lo chiama immagine.

Con quel criterio della vera e dell'apparente spiegazione dei fenomeni, criterio che quivi adombrato in altre occasioni tratterò alla distesa e toccando molte dottrine scientifiche, pare a me dirigersi la

mente sul merito che hanno molte teoriche, sullo scopo utilissimo delle ricerche scientifiche, ch' è uno dei principali ufficii della scienza della ragione, della filosofia.

Le precedenti questioni sembreranno di poca utilità, perchè serrate al logico andamento ristretto all' esame di illazioni e premesse. Nelle scienze naturali quello che più importa è l' induzione, di che diremo ad altro tempo. Già noi non possiamo conoscere l' essenza delle cose, e forse tal frase non ha significato preciso riguardo alle attività esteriori ed anche riguardo alla mente nostra. Pare sia stata presa dalle definizioni essenziali della geometria. Quando io definisco il cerchio, esprimo l' essenza di quella astratta figura, cioè tal condizione da ricavarne tante proprietà come necessarie conseguenze e l' esclusione di tante altre. Si trasportò questa idea nel mondo reale, si desiderò conoscere l' essenza delle attività esteriori, dell' anima nostra, ma inutilmente. Per questi motivi ho sempre detto che nelle definizioni di spirito, spazio, corpo, furono messe note caratteristiche e niente più.

Se quelle note caratteristiche di corpo, che abbiamo anche troppo ripetute, ne costituissero la definizione essenziale, dovremmo col solo ragionamento cavarne fuori tutte le proprietà dei corpi: invece desse ci permettono, senza incorrere in assurdo, d' immaginare tante e tante condizioni di corpo, che non sappiamo se saranno reali.

Stando ai fenomeni, si qualificano alcune di quelle fasi di attività, ed è dal continuo esperimentare ed osservare che il mondo esteriore si metterà in maggior relazione con noi.

Se parliamo pochissimo con un uomo, malamente noi possiamo arguire del suo interno; parlando molto e vivendo alla lunga con esso, arriveremo a conoscere molte delle sue tendenze. Ma l' uomo ha il potere e spesso la volontà di nascondersi, d' ingannarci col linguaggio; i corpi per supremo decreto della Provvidenza ci parlano sempre secondo la loro natura.

L' esperienza e l' osservazione ci forniscono i dati sopra i quali col mezzo dell' induzione formansi le ipotesi, che comprendendo i fenomeni

presi a fondamento, si estendono ad altri in numero indefinito. La filosofia o scienza della ragione c'illumina sulla scelta delle ipotesi nelle varie analogie che potrebbero presentarsi riguardo un gruppo di fenomeni; non essendo sempre sì schietta e facile la somiglianza loro e quella delle cause da cui si considerano dipendenti. E questo primo passo, di che sempre abbisognano le naturali scienze, costituisce la parte induttiva.

Dall' ipotesi che racchiude la legge di derivazione d' innumerevoli fenomeni, col mezzo del ragionamento, date che sieno alcune condizioni, si cavano i fenomeni particolari che vi si riportano, e questo è ufficio della parte razionale. Il confronto di questi fenomeni cogli effettivi conferma, indebolisce, o distrugge una ipotesi.

Questa parte razionale, quando è costretta a raggirarsi sopra altissime astrazioni che raccolgono pochi elementi, perchè si estendono a numerosissimi fenomeni, a diverse cause contrassegnate da pochissimi caratteri comuni, somministra scarse conseguenze; ed il filosofo che ruminandovi sopra si stilla il cervello per farne una scienza, o si aggira in circolo vizioso, od intesse forme di ragionamento che fruttano pochissimo.

Raro è che la mente si mantenga in quel forzato isolamento da tutti gli altri fenomeni che sono esclusi nell'ultima astrazione; la mente assediata di continuo da questi, spesso è sorpresa e crede che appartengano alle conseguenze del suo ragionare.

Il linguaggio modellato sopra casi familiari e sensibili, spinto alle astrazioni porta seco elementi che non vi appartengono; quindi la necessità di definizioni rigorose per segnare le idee che debbono fare comparsa nel ragionamento, per separare quelle che non v'entrano.

Non ci sgomenti qualche esercizio intorno alle più generali astrazioni, giacchè condotto con attenzione e diligenza acuisce l'intelletto e gli dà nerbo, ma coltiviamo con amore ed operosità le scienze sperimentali guidati da quella filosofia che, versando sopra fatti non ischeletriti per soverchia astrazione, porge alimento ad indagini fruttuose, ad utilissime applicazioni.

(*Letta il* 7 *Agosto* 1845)

PARTE SECONDA

Nello esporvi, in una precedente adunanza, alcune riflessioni riguardanti il lavoro filosofico del dott. Fusinieri, per non ingrossare di troppo lo scritto, e per non abusare soverchiamente della vostra indulgenza, lasciai da parte alcune proposizioni sulla di cui esattezza dubitava, e suppostele pure rigorosamente dimostrate, ho rivolto l'esame ad altre per mettere in chiaro le difficoltà che m'erano insorte. E già col fatto avrete riconosciuto la convenienza di tale misura, mentre troppo grave e lunga riuscì non pertanto quella mia lettura.

L'importanza dell'argomento, l'obbligo che m'era assunto di porre in netto i miei dubbii, come nella prima parte ho promesso, mi richiamano adesso a sostenere le mie asserzioni, a mostrare l'inefficacia di quelle dimostrazioni, non già a rafforzare le conclusioni dedotte dalla mia analisi che rimangono intatte.

E qui subito debbo farlo, primieramente per non separare di troppo dal primo discorso, questo che ne è continuazione e compimento; poi perchè onorandomi il Fusinieri di discussione, è conveniente che quanto io aveva da dire su quella sua Memoria sia detto, e così tolgasi anche il sospetto che nella conclusione dell'esame mi vantaggiassi di qualche osservazione fatta nella sua risposta o per avventura mutassi viso alle mie considerazioni.

Alla parte che risguarda l'andamento logico delle deduzioni aggiungerò lo sviluppo di alcune idee che mi vennero alla mente nello stendere quello scritto, e che di passaggio ho notato. Queste idee riportansi all'esame del progresso induttivo nelle naturali scienze, e sotto questo punto di vista rivedremo le proposizioni annunziate dal Fusinieri; così soddisfarò all'altro impegno incontrato di temperare l'aridità di una severa analisi logica intorno ad altissime astrazioni, con uno sguardo di quella modesta filosofia che registra i fatti natu-

rali, li dispone a gruppi, tenta le ipotesi, indaga la legge delle rappresentate cause, la legge de' fatti, e sempre compagna dell'esperienza e della osservazione corregge e perfeziona col paziente confronto le cognizioni; di quella filosofia che ferma nel sostenere una legge sino a che quadra coi fatti, abbandona un'ipotesi e s'appiglia ad altra che meglio spiega i fenomeni, perchè sa non potersi aspirare nelle sperimentali scienze a certezza metafisica.

Mostrato che le odierne dottrine della fisica, come sono professate dalla maggior parte, il sistema atomistico, l'azione a distanza, le ipotesi degli imponderabili, non contrastano colle prime idee di corpo, di forza, onde non si possono tacciare di assurdità; mostrato anzi che nell'ordine analogico sono suggerite dai fatti, che sono adattate alla rappresentazione di tanti fenomeni, costretti come siamo a starsene alla manifestazione esteriore di quelle attività che sono nel mondo, senza poter sapere della loro intrinseca natura; mi propongo, perchè alcuno non creda ch'io abbia toccata appena la scorza dei pregevoli lavori esperimentali del Fusinieri, e mi sia limitato a sottilizzare sull'ultima sua Memoria, mi propongo, dissi, nel corso di quest'anno di trattare particolarmente dei fatti ch'egli ascrive ad una forza ripulsiva della materia attenuata.

Nel quale esame mi saranno scorta quei principii di filosofia induttiva che qui andrò ricordando, a fine di distinguere ciò che veramente appartiene al fatto, da ciò che spetta alla deduzione; e riguardo a questa, notando da quali ipotesi muova il ragionamento, sieno poi desse chiaramente esposte, ciò che di rado avviene, o sottintese, e come siensi fondate.

Il qual lavoro ormai intrapreso, ben volentieri condurrò a fine, rivedendo con attenzione ed ordine ciò che di tratto in tratto ho letto, e perchè risguarda copiosi fatti osservati, e perchè più della mia asserzione dimostrerà che in queste ricerche sono entrato colla brama di conoscere il vero, e non con sinistra prevenzione di dover gettare tutto da banda, per essere stato educato ad una scuola e per professare dottrina che il Fusinieri accusa d'immaginaria ed assurda.

Qualunque corpo, dice il Fusinieri, persevera nello stato di quiete od a muoversi uniformemente in diretto, se non vi è causa esterna che gli faccia cangiare il suo stato. Questa proposizione che si mette per una delle leggi del moto, è un' induzione suggerita dalla esperienza, non mica una conseguenza necessaria del principio di ragione sufficiente combinato colla definizione di corpo.

Difatti essendosi definito il corpo per soggetto esteso dotato di forza motrice, e poi per forza intendendo il Fusinieri ragione sufficiente di moto, quella proposizione suona nel seguente modo: qualunque soggetto esteso dotato di ragione sufficiente del moto persevera nello stato di quiete, od a muoversi uniformemente in diretto se non vi sia causa esterna che gli faccia cangiare il suo stato.

Con quella ragione sufficiente di moto, applicata così assolutamente e generalmente al corpo, non poco vi contrasta la perseveranza di quiete; di più siccome il moto, di cui il corpo possede la ragione sufficiente, non è qualificato di uniforme o vario, di rettilineo o curvilineo, manca proprio la condizione di uniformità, di cammino per diritto.

Aggiungasi che il Fusinieri ritiene non esservi sostanza puramente passiva, per cui rigetta una definizione di sostanza data da alcuni filosofi; dunque il corpo che è pure una sostanza, non essendo puramente passivo, può possedere un'attività di muoversi da sè.

Potrebbesi anche dire, volendo cacciare per tutto quel principio di ragione sufficiente, se il corpo è in quiete e vi rimane, ha da esservi una ragione sufficiente di questa perseveranza: risponderemo noi che persevera nella quiete perchè è soggetto esteso dotato di ragione sufficiente di moto?

Dirò ancora che l'espansione spontanea attribuita dal Fusinieri alla materia attenuata, contrasta assai colla definizione di materia data nella Memoria che commento. Ivi è detto che i corpi considerati come passivi diconsi materia.

Egli è perciò manifesto anche in questo caso, come nei casi discussi precedentemente, che certe conseguenze non discendono necessarie da quella astratta definizione di corpo, essendo semplicemente

una definizione per note caratteristiche, non una definizione dell' essenza.

Altre osservazioni mi tocca fare intorno alla dimostrazione della impenetrabilità de' corpi. Anche qui, che un corpo si opponga a cedere il posto ad altro, che dove è un corpo non ve ne possa essere un secondo, la è verità così manifesta e costantemente dimostrata dall'esperienza, da far meraviglia che i filosofi sieno andati in cerca di sì sottili dimostrazioni. E quindi ne viene che chi sta al fatto non ne dubita punto, chi vuole prendersi a guida il discorso razionale, ottenebra quella idea e si sente pullulare nella mente qualche incertezza.

Ora il Fusinieri dice prima che l'impenetrabilità è proprietà essenziale del corpo e che si dimostra col principio di contraddizione. S'ella è essenziale, io soggiungo, ha da entrare nella definizione di corpo, altrimenti quella definizione è manchevole, e messa nella definizione sarà di fondamento a cavare altre proprietà. Dimostrare quella proprietà vuol dire dedurla da altra che siasi ammessa; e questa proprietà sarà essenziale o secondaria? Se essenziale, dunque vi sarebbero più proprietà essenziali, il che contrasta colla idea che ne danno i filosofi; se secondaria, cadrebbesi nell'assurdo che l'essenziale proprietà dipenda da ciò che è secondario.

Il forte poi del ragionamento del Fusinieri sta in questo, che se due corpi fossero compenetrati, occupando lo stesso spazio, ivi sarebbero ad un tempo medesimo le qualità dell'uno e dell'altro: trattandosi di oro e ferro, ogni più picciola parte sarebbe ad un tempo oro e ferro, lo che è assurdo.

A mostrare l'insufficienza di questo discorso per generale conclusione, io non prendo due corpi diversi oro e ferro com'egli fa, io considero ferro e ferro. Allora cesserà la contraddizione che nel medesimo spazio vi sia ferro e ferro, per cui sembrerebbe che l'impenetrabilità fosse soltanto per corpi diversi. Così ricorrendo al principio di contraddizione, per fare una proposizione necessaria, si esclude una moltitudine di casi che l'esperienza insegna.

I filosofi lamentano tanto la poca sicurezza del fatto, dicono essi che il particolare non vale a fondarvi sopra proposizioni solide e ferme;

e la meccanica dimostra invece assai spesso, che le verità stabilite per induzione dai fatti sono talmente manifeste e sicure, da meravigliarsi di chi ne dubitasse, mentre altre verità che si vogliono dimostrate razionalmente vacillano, e guai se il fatto non accomodasse l'errore del ragionamento.

Passo adesso ad esaminare la dimostrazione data dal Fusinieri sulla comunicazione di moto per mezzo di urto. Nel moto antecedente, dic'egli, vi è la ragione sufficiente di proseguirlo, ed il momentaneo ragione sufficiente della continuazione del moto dicesi conato. Siccome poi la ragione sufficiente del moto chiamasi forza, il conato e la forza sono la stessa cosa.

Se il corpo in moto è ridotto contiguo al corpo quiescente, che ne avverrà? Ecco quello che la ragione non sa indicare. Dice il Fusinieri che se il primo corpo si fermasse, ciò sarebbe contro il principio di ragione sufficiente. Ma quella ragion sufficiente che, quasi anima, muove il primo corpo, quando pure necessariamente il muovesse a velocità costante per diritto, al sopravvenire di circostanze esteriori non si sa che sia per fare. Appunto perchè entra in campo un'altra ragione sufficiente che contrasta la prima, quale sia per esserne il risultato, l'effetto composto, non al ragionamento si ha da domandarlo, ma bensì all'esperienza.

Un grano di miglio avrà la sua ragione sufficiente di muoversi uniformemente e per diritto; quando per altro intoppi in un macigno, che ha la sua ragione sufficiente di star fermo, dovrà cedere, ed il come ce lo dirà il fatto, non il ragionamento.

Tanto è poi vero che nello scontro cessa quella prima ragione sufficiente di moto, che il movimento si muta.

Assunta anche necessaria la legge di movimento uniforme, cessa di estendersi a questo caso novello, perchè si è già detto che sussiste sino all'intervento di cause esterne, nè più in là si volle progredire.

Notò benissimo Hume che, pel nostro spirito, indefinito numero di accidenti sono possibili nello scontro di due corpi. Potrebbe il secondo corpo, ch'era fermo, al primo tocco sbandarsi e dar luogo all'altro che passi; potrebbe il primo girare attorno al secondo, tornar

addietro e che so io: una novella condizione aggiunta turba necessariamente quel principio, fosse anche generale, fondato senz'avervi riguardo.

Ed è appunto da questo che muove la differenza caratteristica delle due scuole di Hume e di Kant. Disse Hume che noi non abbiamo, nè possiamo avere l'idea della connessione necessaria fra gli avvenimenti della natura. Kant ammettendo il principio di Hume altrimenti conchiude. La causalità, dic'egli, non è nella cosa osservata, dunque è nell'osservatore; non è oggettiva, dunque è soggettiva. E poichè la congiunzione, continua Kant, che si pone fra il moto del corpo urtante e quella dell'urtato non viene dall'esperienza, essa è soggettiva. Entrando in campo il Galluppi osserva che se fosse soggettiva dovrebbe essere necessaria, ma lo spirito non riconosce questa necessità, dunque, egli conchiude, non può essere soggettiva.

Così mentre Hume e Galluppi riconoscono che lo spirito non vede la necessità di comunicazione di moto, Kant vuole quella ragione soggettiva, ed il Fusinieri si assume di dedurla dalla legge di perseveranza di un corpo nello stato in che si trova. Tante e sì diverse sono le sentenze dei filosofi che credono da una definizione descrittiva potersi cavar tutto razionalmente, da far dubbiare sui fatti più palesi e manifesti chi loro abbadasse.

Più innanzi è detto che il conato del primo corpo di occupare il luogo del secondo si chiama conflitto od urto, che il conflitto è causa necessaria di comunicazione di moto, che anzi nessun'altra causa è concepibile, e che l'urto del secondo nel primo nominasi reazione.

Dall'idea di corpo, per quanto la si esamini, non si cava la necessità di quella comunicazione; l'effetto dello scontro ci viene indicato dall'esperienza e come uno dei casi di moto, non già come l'unico, perchè i fenomeni ci appalesano moti senza lo scontro, e sarà semplice ipotesi il credere che questi riducansi poi a comunicazione per contatto. Non so poi come, usando della parola urto nel significato che le fu attribuito, si possa dire urto del secondo corpo nel primo.

A mostrare l'inconvenienza di quell'applicazione basta richiamare la definizione e sostituirla alla parola che la rappresenta. Mettendo in

luogo di conato la sua definizione, ne viene che urto è il momentaneo ragion sufficiente della continuazione del moto del primo corpo di occupare il luogo del secondo; ed applicando quella frase al secondo, ne viene che urto è il momentaneo ragion sufficiente della continuazione del moto del corpo in quiete. Così tradotta la parola urto, sostituita la definizione al definito, nè alcuno può opporsi, la proposizione parla da sè.

Si scorge che il voler cavar fuori da una idea una condizione che non vi si è compresa conduce a stranezze, ed in luogo di un giusto razionalismo si cade in oscurità e contraddizione.

Nè passerò sotto silenzio l'asserzione che l'urto del primo corpo sul secondo e di questo sul primo sieno due idee equivalenti, non potendo intendere come sia equivalente l'idea di corpo che perde di velocità e quella di corpo che acquista velocità; come sia equivalente l'idea di corpo che prima movendosi si arresta, e l'altra idea di corpo che prima essendo quieto poi si muove.

Osserverò ancora che si tratta di esporre i fondamenti della teorica dell'urto de' corpi senza dire che cosa sia massa ed elasticità. La definizione data di corpo non comprende il carattere di massa, nè quello di elasticità. E quando pure si tenesse per dimostrata la necessità che un corpo, incontrandosi in altro che posa, lo determini al moto; abbisognano altri principii, o dirò meglio suggerimenti dell'esperienza, per dire in che maniera procederanno le velocità.

Certamente chi dietro la definizione prende in aiuto tutto quello che ne insegnò l'esperienza, e lo crede raccolto nella definizione, vede necessarie quelle conseguenze. Ma questa è una illusione logica.

Contrasta poi questa maniera razionale voluta dal Fusinieri di dedurre necessariamente gli effetti dell'urto, con quello ch'egli ha detto espressamente nelle prime linee, che ci mancano le vere idee delle cose esterne, che le idee si limitano alla superficie, che niente sappiamo di quello che è veramente interno de' corpi.

A tutto questo s'aggiunga che le questioni sull'urto de' corpi sono delle più difficili a trattarsi nella meccanica, che solo ne abbiamo abbozzata la soluzione in qualche caso. Nè si dica che la teorica dei corpi

perfettamente duri o molli è facile e rigorosa; ch' io mi riporto al fatto e quello ha da decidere. Io non so che fare di quelle dottrine che si dicono vere in teorica, false in pratica, quando si tratta di spiegare i fenomeni della natura. Al più saranno passi fatti per arrivarvi, non mai lavoro compiuto; ed il Fusinieri non volle certamente parlare di corpi fittizii, ma de' corpi che sono in natura.

Ed è ancora da avvertire che riguardo alle azioni de' corpi a distanza, riguardo all' attrazione universale, abbiamo problemi difficili sì ma risoluti completamente, circostanze di moto dedotte, che l' osservazione mirabilmente conferma. Così mentre si vorrebbe tirar tutto all' urto, la meccanica è imbarazzata nelle questioni di comunicazione di moto per urto, e grandeggia e va superba per quelle dei movimenti che si appalesano dipendenti da azioni a distanza.

In tutta questa disamina io convenni col Fusinieri sulla definizione di corpo; e mostrai mano a mano col ragionamento che non ne derivano per niente quelle conseguenze ch' egli vorrebbe, ond' è che a torto accusa i fisici, che la pensano altrimenti, di assurdità e di contraddizione. Ho supposto giusta la definizione, e la tengo giusta come ho detto da principio, senza fare mai la domanda che ho serbata a questo momento: da che ha egli cavato quella definizione?

Permettete che su questo punto spenda poche parole, giacchè tal esame convalida per altra maniera tutto quanto fu detto sin qui, e mi apre la via a quell' ultima parte del lavoro che contiene alcuni principii, alcune regole di filosofia induttiva.

L' idea di corpo qualificata dalla nota di estensione e di attività non può essere che soggettiva od oggettiva, quando pure, riguardo all' origine delle idee, si considerino in tutta generalità i sistemi filosofici.

Primamente non credo che il Fusinieri si metta con quei filosofi trascendentali che guardano lo spazio e l' estensione come una forma dello spirito nostro; poi, se ciò fosse, domanderei a lui ed a tutti questi se si limitano a considerare quella idea di corpo innata nell' anima, come una semplice contemplazione interiore, ovvero se vogliono che abbia una corrispondenza col mondo reale. Nella prima supposizione lascieremo quel fantasma ed il suo culto a tali sacerdoti,

giacchè niuna relazione ha con quanto c' interessa. Nell' altro caso, poichè alcuni trascendentali dicono che le intuizioni soggettive assumono un valore oggettivo nell' esperienza, è manifesta una ricerca importantissima: posto che quella interna ed intima intuizione ha da combinare con quello che è fuori dell'anima, con quali mezzi l'anima può verificare questa corrispondenza?

Fingete che taluno dica di possedere nella mente l' immagine di una persona non mai veduta; volendo verificare quella corrispondenza tra il fantasma sorto in qualsiasi maniera nella fantasia e l' effettiva persona, di che mezzo sarà per usare? In questa circostanza è chiara la risposta: del mezzo de' proprii occhi guardando la persona. Allora pronunzierà se sia giusta o no quella sua anticipata rappresentazione.

Dunque anche nel sistema filosofico delle idee innate, quando si tratti di fisiche verità, è necessario di esaminare per quali fenomeni de' sensi si arriva alla importante conclusione che le interne rappresentazioni corrispondono a realtà.

Stando alla sola intuizione interiore, tutto quello che si cavasse sarà al più esercizio logico e costringente l'assenso della mente che lo fa, non già conclusione che abbia applicabilità esteriore, e meno ancora conclusione a cui ogni mente pensante sia obbligata di darvi assenso, sotto pena di essere accusata di assurdo o contraddizione.

L' idea dell' ente sia pure innata, sia un elemento della dote dell' anima quando è messa col corpo prima che per questo suo ministro abbia avuto commercio col mondo esteriore; in qual maniera verifica l'anima che quella sua intuizione combina colle rappresentazioni del mondo esteriore, come trova un' applicabilità vera e reale di quell' elemento soggettivo?

Del resto veniamo alla considerazione che l' idea di corpo sia oggettiva, nel che consente il Fusinieri, avendolo espresso chiaramente col dire che le idee delle cose ci vengono dai sensi.

A definire questa idea bisogna richiamarci ai fatti particolari che rappresenta ed alla generalità dei caratteri che si sono assunti, alla forma con cui si sono determinati.

Ecco che questi fatti si spartono in due grandi classi. Stanno nella prima le modificazioni prodotte sopra di noi direttamente; nella seconda tutte le vicendevoli modificazioni prodotte dai corpi fra loro, ed a noi rivelate per fenomeni. Nella prima classe le attività esteriori agiscono direttamente sopra il nostro essere; nella seconda classe dei fatti, le modificazioni che riceviamo sono un linguaggio con cui quelle attività ci appalesano ciò che fanno tra loro.

Un sasso urta nel mio corpo e mi fa provare una modificazione che direttamente mi manifesta quanto possa sopra di me quell' esteriore causa; un sasso s' incontra in altro e lo sposta o lo muove o lo spezza, il fenomeno visivo mi rivela un effetto di quella prima attività operante sull' altra.

In questa multiforme serie di fenomeni si trova intanto un carattere comune, quello dell' estensione. Poi si trova il mutamento o proprio o prodotto. Se adunque con attività intendesi generalmente la facoltà di modificarsi e di modificare, colle due note di estensione ed attività si qualifica generalmente l' idea di corpo.

Bisogna per altro ricordarsi che siffatta definizione è descrittiva, non è essenziale. Quei caratteri desunti dai fenomeni e ritenuti in quanto che si appalesano variamente sì, ma in tutti i corpi, bastano per dire quello è corpo; ma da essi soli così in generale non ci sarà mai dato di arguire tutte le proprietà particolari dei corpi. Quella definizione è propriamente da paragonarsi alle definizioni artificiali della botanica. Una pianta porta un fiore in cui vi ha una corolla distinta affatto per semplice carattere da tutti gli altri fiori; ecco che la frase botanica ch' esprime quella struttura costituisce la definizione artificiale di quella pianta. Vorrete dedurre da questa la configurazione delle altre parti, le proprietà della pianta? ben si vede che nol si può fare, mentre nella medesima parola di artificiale è chiaramente espresso lo scopo di quella definizione.

Fra le modificazioni di un corpo vi è il moto od il mutamento di moto combinato al fenomeno di contatto, di scontro. Certamente questa è una fase, è una maniera di attività de' corpi. Stando a questa sola dovrebbesi dire che il corpo è soggetto esteso dotato della pro-

prietà di essere mutato nel suo stato di quiete o di moto quando è scontrato da altro soggetto esteso.

Ove si adottasse questa definizione cesserebbe la necessità di fare un ragionamento, per dire che un corpo scontrandone un altro in quiete lo muove.

Questo ho detto perchè se il Fusinieri, in quel carattere di forza motrice attribuita al corpo, s'intendesse propriamente di aver messo la circostanza del mutamento di stato per contatto o scontro, osservo che cessava il bisogno di fare lungo discorso per conchiudere che il conflitto od urto è causa di comunicazione di moto; poi ripeto che tale definizione di corpo sarebbe povera e manchevole; in fine conchiudo che non poteva accusare di assurdo o contraddizione chi, stando a più larga definizione, comprende nel carattere di attività l'azione a distanza.

È ormai tempo che abbandonando il campo logico, il confronto severo delle premesse colle conseguenze, esaminiamo le proposizioni del Fusinieri riguardo all'induzione, per vedere se sia vero che quanto la esperienza insegna, contrasta o malamente si adatta alle ipotesi che corrono per le scuole. Già ben s'intende che, se ciò fosse, il peccato dei fisici sarebbe solo di poca avvedutezza nella scelta delle ipotesi o delle maniere con cui si rappresentano i fenomeni del mondo; non mai quello di cadere in assurdità o contraddizione, ammettendo essi proprietà nel corpo che vengono escluse dalla medesima sua definizione, accusa che ben alla lunga ragionando, abbiamo ribattuta e dimostrata insussistente.

Molte e variate sono le sensazioni o modificazioni nostre, le quali non dipendono dalla nostra volontà, ma seguono spesso suo malgrado, e perciò si attribuiscono ad attività esteriori distinte dalla nostra.

Tali fenomeni dispongonsi a gruppi, a classi, secondo la nostra sensibilità, secondo la maniera con cui noi li riportiamo a cause esterne. Fino a questo punto si starebbe semplicemente nella storia di ciò che sentiamo senza andare più innanzi.

Ma l'umana mente si estende al passato, al futuro. L'uomo crede che le cause esteriori abbiano prodotto effetti che non si rivelarono

ad esso, che le cause esteriori continueranno ad operare nell'avvenire anche quando egli sarà tolto a questa gran scena del mondo materiale.

Per questa credenza l'uomo mette continuità nel passato che ha esperimentato ad intervalli, fra il passato esperimentato e quello che sfuggì a' suoi sensi, fra il passato e l'avvenire.

Questa è condizione dell'anima nostra voluta dalla Provvidenza, non è frutto di ragionamento che riposi sopra altri principii, è invece base di quelle deduzioni che menano a particolari verità. Ben disse Hume, non essere la ragione che ci ammaestra, il futuro essere simile al passato; e quindi adombrò l'idea di un istinto, di una legge dello spirito.

Nè solo Hume, le di cui opinioni potrebbero essere sospette di scetticismo, ma nei libri de' filosofi più moderati trovasi e la necessità di questa visione di continuità, e meglio ancora la conoscenza di un sentimento dato da Dio all'anima, pel quale, senza raziocinio, crede alla concatenazione delle cause cogli effetti. Ed a questo mirarono i sistemi filosofici, fra' quali l'armonia prestabilita di Leibnizio, la visione in Dio di Malebranche.

Noi ci rappresentiamo quelle cause per mezzo de' fenomeni che ce le hanno rivelate, e distribuiamo per gradi i molti fenomeni appartenenti ad una classe. Di qui l'idea della varia intensità della causa relativamente a quei fenomeni.

Dobbiamo ricordare che i fenomeni ci hanno condotti all'idea di quella causa, che ce la rappresentiamo come potenza operante quei fenomeni, che altra idea di quella causa non possiamo avere. Cosicchè la credenza di quella causa dipende da una legge dell'anima nostra; la sua rappresentazione nella nostra mente risulta dal gruppo dei fenomeni pei quali l'anima venne in quella credenza. Ferro, legno, acqua, olio e che so io, sono nomi di attività esteriori fermamente credute, definite per fenomeni particolari che loro corrispondono.

La tendenza di attribuire i fenomeni a cause, di spiegare, di predire, è così forte nell'uomo, che il più zotico formasi la credenza di cause, spiega, predice, e spesso con maggiore persuasione dell'illu-

minato, ond'ebbe a dire lo Stewart non esservi maggior teorico che l'ignorante.

L'esperienza e l'osservazione che danno origine a quella credenza di cause, sono quai punti direttori che guidano nella difficile via delle verità naturali.

Ogni fenomeno si lega a molti altri, e noi teniamo che uno o pochissimi bastino ad assicurarci di una causa contrassegnata anche da molti indizii. Così si cade talvolta in errore, errore della mente che ritiene il concorso di tutti quei fenomeni indicatori al manifestarsi di uno solo o di pochi. Che se i filosofi studiosamente segnano questa sorgente di errore, io considero che d'altra parte senza questo slancio saremmo in una continua diffidenza, le nostre determinazioni sarebbero lentissime; da mane a sera saremmo condannati ad una continua verificazione, da poter appena sovvenire a' nostri bisogni principali.

Badare attentamente la prima volta alla serie delle modificazioni che corrispondono ad una causa, andare guardinghi quando in novelle esperienze ed osservazioni siamo tolti dall'ordinario andamento, e rivedere quei legami che ci siamo formati quando fenomeni particolari sturbano le ammesse credenze; ecco le regole di filosofia induttiva che ci possono fruttare assai.

Le manifestazioni del mondo esteriore per l'uomo sono ad intervalli, formano per esso una serie discreta, a salti; e la legge di continuità, le leggi particolari di relazione sono in fine ipotesi espresse o sottintese. Quindi è che le ipotesi sono volute dalla condizione dello spirito nostro. La mente che non facesse ipotesi sarebbe come quella di uomo in letargo che si sveglia a quando a quando riscosso da azioni esteriori, sarebbe come quella di uomo privo di memoria che sente e niente più.

E queste conclusioni che potrebbero sembrare troppo generali stanno salde contro qualsiasi sistema filosofico che le oppugni.

La mente crede ad un legame, ad una relazione tra i fenomeni; verità è questa di cui nessuno può dubitare. Questo legame non lo legge direttamente nel mondo esteriore, prima perchè i dati che ha sono particolari, isolati; poi perchè quello che fu e non l'ha osservato,

quello che sarà, non può entrare ne' suoi dati; e l'aspettazione del futuro simile al passato è una frase con la quale si annunzia la generalissima ipotesi della continuità, delle relazioni tra i fenomeni e le cause.

Quella credenza è nell'anima mediante le modificazioni che riceve dal mondo esteriore; senza di queste, derivanti dall'esperienza e dall'osservazione, niuna idea avrebbesi delle vicende della natura. Per quelle che va poi a mano a mano ricevendo, l'anima si conferma nella persuasione prima concepita, o corregge ed abbandona le prima vedute.

Nell'esame del grandissimo numero d'ipotesi, sulle quali poi si esercita il ragionamento, a me pare doversi fare una principale distinzione. Mettiamo due serie di fenomeni e che tra quelli dell'una ed i corrispondenti dell'altra si trovi una relazione; l'anima ben presto formasi l'ipotesi che tale relazione sia generale, che abbia luogo per tutti quei fenomeni delle due classi che si presenteranno.

Nella fisica abbiamo frequenti esempii di queste leggi, che potrebbero dirsi dei fenomeni. Le tre leggi di Keplero appartengono a questa classe. E per venire a più familiari esempii le leggi della riflessione e della rifrazione sono di questo genere. Ivi si tratta di esprimere, qualunque siasi la causa, una certa corrispondenza fra due serie di angoli che rappresentano i fenomeni della luce quando è ribattuta, quando trapassa.

Allorchè il Fusinieri accennava la necessità di starsene ai fenomeni, pare a me abbia avuto in mira queste leggi dei fenomeni, leggi di molto aiuto nello studio della natura; leggi che comprendono quello che i sensi ci somministrano, e che, una volta determinate con molta cura e per lunghi confronti accertate, sussistono qualunque siasi il sistema che si adotti per ispiegare le cause di quei fenomeni.

Ma la mente umana si spigne più innanzi a vedere un ordine di fenomeni ch'esprimono l'intensità delle cause. Quell'ordine di fenomeni caratterizza la maniera di azione delle cause in guisa da cavarne per conseguenza particolare le prime leggi che abbiamo accennato. Keplero ha dimostrato coll'osservazione quelle tre leggi; Newton risalì

all'attrazione universale, da cui scendono come corollarii. Ciò che importa notare si è, e questo sia detto per i molti casi simili che si trovano nelle scienze naturali, che Newton confrontò la serie dei fenomeni che qualificano l'attrazione doppia, tripla ec., colle distanze e le masse. Ho detto serie di fenomeni che qualificano attrazione doppia, tripla, sapendosi bene che ciò si risolve in ispazio e tempo, che sono quantità misurabili e rappresentanti la velocità che si prende a misura dell' intensità della causa.

Quindi è che per fenomeni esprimiamo le condizioni delle cause, e per fenomeni le classifichiamo; per gradazioni di fenomeni esprimiamo le intensità delle cause: e le scienze naturali progrediscono ed aumentano colla scoperta delle leggi fenomeniche, e delle leggi ch'esprimono la relazione tra fenomeni misuranti l' intensità delle cause e fenomeni che corrispondono a varii effetti.

Spiegare e predire nel concetto filosofico sottostà alle medesime condizioni, riducendosi al mostrare che due fenomeni sono legati per una legge che si è supposta. Spiegansi i fenomeni che furono, si predicono quelli che hanno da succedere. Spiegare l'epoca in cui è avvenuta un'ecclissi di sole, sta nel mostrare che, secondo i movimenti de' corpi celesti, l' ombra della luna appunto allora doveva arrivare alla terra e spandersi per determinate regioni. Predire l' ecclissi che avrà luogo in epoca futura torna il medesimo. È solo variare la data del tempo per cui si calcola.

E se facciamo grandissima differenza tra spiegare e predire, se facilmente ci mettiamo a spiegare un fenomeno osservato, se siamo ritrosi invece a fare una predizione, ciò avviene perchè nel dare spiegazione si prendono elementi anche estranei, sapendosi dove tocca arrivare; nella predizione è la sola legge che ci guida.

Spiegare adunque suppone una gradazione di fenomeni, una legge di cui si mostra esser caso particolare quello che si considera. Quel fenomeno non ha da essere esplicito nella determinazione della legge, altrimenti farebbesi circolo vizioso.

Un sasso lasciato in balìa di sè stesso cade. Dire che questo avviene perchè è grave, perchè è soggetto alla gravità, non è spiegare il fe-

nomeno. La caduta de' corpi ci condusse a definire la gravità; quel fenomeno è compreso nella definizione.

Un pendolo compie la sua oscillazione in dato tempo. Mostrando che ciò deriva dalla gravità si dà una vera spiegazione, mentre il fenomeno del pendolo non entra esplicitamente nella definizione della gravità.

Tornando al lavoro del Fusinieri dirò che riguardo alle prime proposizioni dell' impenetrabilità, della comunicazione del moto per urto, i fisici sono d'accordo con esso: già l'esperienza parla assai manifestamente, ed abbiamo già dimostrato alla distesa che inutilmente si tenta stabilirle per via di ragionamento.

Una numerosissima serie di fenomeni di movimento si presenta fra corpi a distanza, movimenti di corpi che dipendono da altri e che si collegano per intensità alle distanze. Perciò siamo obbligati ad ammettere siffatta attività ne' corpi, da influirsi ne' moti a distanza e non per urto. È un vessillo, secondo il linguaggio medesimo del Fusinieri, sotto cui si schierano que' molteplici fatti; e propriamente stando ai fenomeni, lo che tanto egli giustamente raccomanda, dobbiamo rappresentarci tal maniera d'azione nei corpi. Se avverrà che per nuovi fatti si dimostri che quei fenomeni riduconsi a casi di urto o scontro, allora riuniremo in una sola classe tutti i fenomeni di movimento dipendenti da azione di corpi.

La legge dell'attrazione universale non soffrirà verun cangiamento, avendo più sopra osservato che quella legge mette in relazione una serie di fenomeni, che direbbesi misurare l'attrazione, con una serie di fenomeni che comprendono massa e distanza. Qualunque siasi la causa di quella maniera di avvicinamento fra due corpi, l'esposta legge sussisterà sempre, perchè confermata da tante osservazioni.

L'ipotesi degli atomi, intendendosi già de' corpi semplici, oltre a che ne rappresenta benissimo alcuni fenomeni della chimica, è suggerita da quel notissimo fatto, che un corpo sprigionato da una combinazione con altri ha le medesime proprietà di prima. È ragionevole il pensare che le particelle ultime dell' idrogeno, che con quelle dell' ossigeno han formata l'acqua, sieno rimaste intatte.

Supponiamo che mettendo insieme e variamente agitando granelli di varia natura, separandoli poi dalla commistione, le masse dei granelli abbiano il medesimo volume, le medesime proprietà ed apparenze di prima; sarà ben ragionevole il ritenere che quei granelli siensi serbati intatti.

E poi che difficoltà porta seco il sistema atomistico in quelle spiegazioni di fenomeni che abbisognano di una enorme divisibilità della materia? niuno ha detto che l'atomo dell'idrogeno sia, in volume, la millesima parte del granello di sabbia. Se si dicesse che occorre immaginare una particella d'idrogeno minore di un milionesimo del volume di granello di sabbia, il sistema atomistico non vi si oppone. A tutti i fenomeni di attenuazione della materia osservati dal Fusinieri può corrispondere il sistema atomistico. Sarà piuttosto da pensare come in quella immensa diradazione della materia si possa escludere l'azione a distanza, e tutti i moti abbiano a seguire per urto soltanto.

Dunque il sistema atomistico rappresenta alla nostra immaginazione molti fenomeni; non si oppone, nè può opporsi a quelli che addomandano una grandissima e portentosa divisibilità della materia; non contrasta colla idea di corpo: e perciò tal sistema è suggerito dalla filosofia induttiva.

Vengo alla ipotesi degli imponderabili, e particolarmente alla ipotesi del calorico, affinchè il discorso sia meglio determinato; tanto più che quanto diremo per questo, si potrà riportare agli altri fluidi suoi compagni.

I corpi che diciamo ponderabili, oltre a tante proprietà per le quali distinguonsi fra loro, producono sopra di noi quelle modificazioni che diciamo caldo, freddo. Il ferro, il marmo, il legno, l'acqua ed altri corpi esposti al fuoco, esposti al sole, acquistano la proprietà di produrre sulla nostra mano, quando li tocca o loro si avvicina, la sensazione del caldo. Tale sensazione si esperimenta con varia intensità se accostiamo la mano, se la esponiamo al fuoco od al sole.

Questa proprietà comune a quei corpi dopo che furono esposti al fuoco, i fenomeni che producono sopra di noi analoghi a quello che esperimentiamo direttamente dal fuoco, suggerisce l'idea che dessi ab-

biano acquistata quella facoltà, che non sia loro propria, e che tale modificazione derivi da altra causa, da un corpo particolare.

Così quando toccando colla mano più corpi, proviamo una sensazione analoga a quella che si esperimenta al tocco di panno bagnato, riconosciamo che un velo di acqua circonda quei corpi, e che dall'acqua addossata proviene quell'uniforme sensazione. Se colla lingua si tocchi olio, vino, acqua, e si provi una sensazione salina analoga a quella che si prova assaggiando il sale comune, si crederà ragionevolmente che in quei liquidi sia sale. E se quei liquidi abbiano un sapore spiccato comune che non abbia a fare con quello che è loro proprio, diremo che in essi vi è sostanza particolare.

Quanto più quei primi corpi solidi si lasciano esposti al fuoco, quella proprietà di riscaldare la mano che li tocca, trovasi appartenere alla parte più interna, e quindi si rinforza la prima induzione di attribuire tale potenza a corpo particolare che a mano a mano invade quelle materie.

Così i primi fenomeni di calore si attribuiscono ad una causa diversa dai corpi ordinarii, a particolar corpo che diciamo calorico; e quei fenomeni ne costituiscono la prima definizione.

I fenomeni di riscaldamento non annunziano quelli di dilatazione operati dal calorico sopra i corpi che invade, nè la mutazione di stato che vi produce; ma l'esperienza e l'osservazione mostrandoci congiunti que' due effetti, ci obbliga a risguardare quelle due proprietà pertinenti al calorico.

Certamente che questo avanzamento di cognizioni si fa per sintesi, essendo, come ho detto altra volta, le definizioni di che usiamo relative ai corpi, definizioni artificiali che servono soltanto a distinguerli fra loro, nè già, come avviene nella geometria, definizioni essenziali da cui col ragionamento si cavano tante proprietà collegate necessariamente.

Guardate ne' libri de' naturalisti e vedrete i segni per riconoscere i varii corpi, segni per la massima parte indipendenti gli uni dagli altri. La proprietà che ha il ferro di combinarsi all'ossigeno dando origine a corpi che hanno alcune peculiari proprietà, non è legata

colla sua tenacità, nè col suo peso specifico, nè col suo colore. La parola ferro è quel nome, quel simbolo che rappresenta nella mente il corpo cui appartengono certe proprietà. E quanto più si procede colla esperienza e colla osservazione, si aggiungono altre proprietà, e talvolta si legano insieme proprietà, di maniera che l'una fa passare ad altra.

Quel calorico che penetra nei corpi e di particella in particella si trasfonde come acqua che si caccia in materia porosa, alle volte attraversa l'aria e si diffonde anche per raggi, o per meglio dire arriva a' corpi senza fermarsi tra via, come lo spruzzo di acqua bagna le pareti lasciando asciutta l'aria per cui passa.

Il calorico si riflette secondo le leggi dell'elasticità perfetta, cioè arriva ad un luogo come arriverebbe corpo elastico ripercosso.

L'esperienza e l'osservazione fornirono mezzi di descrivere la gradazione dei fenomeni che noi attribuiamo a questo corpo, alla maniera di sua azione.

Così nel penetrare ne' varii corpi, nel diffondersi per la loro massa, nel modo di uscirne si notano le varie conducibilità; e questa parola, come tante altre, riportasi a fenomeni che descriviamo, che misuriamo.

Trovaronsi leggi di fenomeni che assoggettate a calcolo servirono a spiegare, a predire alcuni fatti, e la conferma dell'osservazione ci assicurò di loro esattezza.

Dobbiamo al Melloni l'indicazione di numerosi fenomeni che dimostrano questo calorico eterogeneo, e quindi ci conviene ammettere differenti raggi di calorico dotati di varie proprietà riguardo ai corpi che trapassa.

La natura si rivela a poco a poco, e per sintesi si compone il libro delle scienze sperimentali. Bella e sublime è l'idea o la speranza di arrivare ad una legge che tutte le particolari leggi leghi ed unisca, che a verità neppure sospettate ci meni. Lodevoli i voli della fantasia nella scienza quando tenta di trovare un nesso, una unione fra i fatti che appaiono indipendenti. La scoperta dell'attrazione universale, che con un solo principio spiega tanti movimenti complicati, scuserà sempre questa

speranza dell'uomo, se pure nel lungo volger dei secoli rimanesse delusa: ed il sistema dell'ondulazione, pe' fenomeni della luce, incoraggia il fisico a pensare che da un solo fluido provengano i fatti del calorico, l'incoraggia ad immaginare che da un solo fluido derivino i fenomeni che ora ascriviamo a tanti corpi.

Ora il Fusinieri vorrebbe che i fenomeni del calorico derivassero dalla materia ordinaria, e da questa ancora i fenomeni dell'elettricità, della luce, del magnetismo. Qual vantaggio ha questa ipotesi sopra quelle delle scuole? Per ora queste proprietà diverse dalle altre che ci presentano d'ordinario i corpi, bisogna metterle a lato, non confonderle con quelle che si conoscono. Che il ferro attenuato penetrando nelle mie fibre produca la sensazione di calore, che entrando nel ghiaccio lo risolva in acqua, ch'entrando nell'aria la riscaldi e la dilati, sarebbero fenomeni diversi, indipendenti da quelli che abbiamo riconosciuti in quel corpo. E tali fenomeni, o simili, si avrebbero dall'acqua attenuata, dagli olii, dagli altri corpi.

Così alla schiera de' fenomeni, che ora diciamo del calorico, si dovrebbe dare la denominazione di fenomeni della materia attenuata. Dunque non si avrebbe che mutato il nome.

Ma l'ipotesi del Fusinieri ci obbliga ad ammettere ne' corpi, ridotti ad attenuazione, proprietà opposte a quelle che presentano in masse sensibili. L'olio non ha tendenza di unirsi all'acqua; attenuato e ridotto capace di produrre i fenomeni del calore si unirebbe al ghiaccio liquefandolo, senza più dar segno di sè: viceversa corpi dotati di affinità non presenterebbero in quella attenuazione tendenza ad unirsi. Di quante specie di materia attenuata dovrebbe riempirsi una boccia quando ci si offre riscaldata, e sempre senza combinazione?

I corpi solidi che conosciamo sono imperfettamente elastici; ridotti ad attenuazione acquisterebbero la perfetta elasticità.

Ecco adunque che quella ipotesi esaminata nell'induzione è inferiore e d'assai alla ordinaria, la quale, descrivendo i fenomeni, li attribuisce a cause speciali diverse dai corpi ponderabili.

Calorico, luce, elettrico, magnetico, sono nomi, sono simboli che ci riuniscono alcuni gruppi di fenomeni diversi da quelli che ascriviamo

alla materia ponderabile. La via induttiva ci consiglia a separare quelle cause dalle ordinarie; altrimenti dovressimo ritenere i medesimi gruppi o classi di fenomeni, e denominandoli per effetti della materia attenuata, senza alcun vantaggio nella determinazione delle leggi, dovressimo dimenticare le solite proprietà, quasi che i corpi ordinarii avessero due o più nature.

E qui ormai pongo termine a queste considerazioni suggerite da attento e paziente esame del lavoro del Fusinieri, la di cui autorità mi spinse a dubitare delle correnti dottrine, benchè sostenute e professate da fisici distinti; e a non fidare più in esse, senza prima aver ponderato per quanto meglio io sapeva, le ragioni per le quali ci le condanna come erronee ed assurde.

Onde credo che, sebbene io non sia per attenermi a quanto egli consiglia e vorrebbe, gli avrò dato segno manifesto di stima qual' ei ben merita, non di quella che il più sovente dimostrata soltanto in parole e con esterni segni, è poi contraddetta col fatto da chi rigetta senza ponderazione, senza analisi, senza pensarvi pur sopra, suggerimenti opposti alla propria opinione.

E queste considerazioni ho voluto leggervi, perchè appunto toccando a molti fra voi di accogliere o rigettare le riforme della fisica proposte dal Fusinieri, abbiate a pronunziare finale sentenza dopo che vi saranno state messe innanzi ed avrete bastevolmente esaminate le ragioni che militano per l'una e per l'altra parte.

(*Letta il* 30 *Novembre* 1845)

NUOVA DETERMINAZIONE

DELLE COSTANTI RELATIVE

ALLA RESISTENZA D'ATTRITO

NEL MOVIMENTO DELL'ACQUA

PE' LUNGHI TUBI DI CONDOTTA E PER GLI ALVEI

DEL PROF. DOMENICO TURAZZA

Ogni qual volta la teorica, per mancanza di dati o per difficoltà cui non valse per anco a superare, si vegga costretta a lasciar da parte alcune ricerche, della cui soluzione ha frequente ed imperioso bisogno la pratica, suole quest' ultima far corredo del maggior numero possibile di osservazioni, e ciò collo scopo di cercarvi per entro una qualche legge che non è dato alla teorica di mostrare, od almeno un mezzo con cui giungere alle soluzioni desiderate.

Due strade sono ordinariamente battute in tale ricerca. L' una è quella di accomodare al bisogno una formola di *interpolazione*, la quale, adattandosi ai casi effettivamente osservati, possa far nutrire fondata speranza di inchiuder pur quelli che dai medesimi non si dilungan di molto. L' altra, preferibile sempre ogni qual volta sia possibile usarne, si è quella di considerare attentamente le variazioni prodotte nella quantità che si cerca da quelle che subiscono i varii ele-

menti da cui essa dipende, ed, abbozzata la legge di tali variazioni, costruire la formola relativa, completandola col necessario numero di costanti, che dal confronto colle varie osservazioni ed esperienze vengono in appresso determinate.

Quest'ultimo modo che tiene, per così dire, il mezzo fra la semplice interpolazione e la rigorosa teorica, ha sul primo, quando si possa praticarlo, il notabile vantaggio di potersi allargare nelle sue applicazioni, essendo per esso assai maggiore la probabilità che la continuità della formola sussista ancora pel fatto.

Nelle formole che vengono di tal modo costruite devonsi dunque attentamente osservare due cose, la composizione della formola cioè, e i valori delle costanti ch'entrano nella medesima. Egli è solo col moltiplicare le esperienze e le osservazioni che si possono sceverare le cause efficienti da quelle che accidentalmente soltanto accompagnano il fenomeno; che si può conoscere l'influenza di queste cause, e si rende possibile di scoprire la legge secondo la quale esse operano, la funzione infine dei varii elementi che misura l'intensità del fenomeno. E qui convien ricordare che è ben altro il dire un fatto determinato essere prodotto da una certa causa, altro il pretendere di avere con queste sole parole data la spiegazione del fenomeno; chè questa è allora solo perfetta, quando valga a seguire e misurare il fenomeno in tutte le sue varie e minime gradazioni. Intravvista la legge secondo cui alcuni elementi dipendon dagli altri, si riuniscono fra loro questi elementi in una formola mediante alcune costanti opportunamente introdotte, e dipendenti dai particolari valori numerici dei detti elementi nei particolari casi contemplati dalla formola.

Se la legge presupposta in essa formola fosse la vera, ed esattissime fossero le varie osservazioni, per giungere alla determinazione numerica dei valori di quelle costanti basterebbe prendere un numero d'osservazioni eguale al numero delle costanti medesime, e formare con queste altrettante equazioni da cui ricavare i valori cercati. Ma può la legge non essere che approssimata, le varie osservazioni od esperienze essere affette d'errori più o meno notabili, e allora quei valori delle costanti che venissero di tal maniera determinati, s'accorderebbero

bensì colle osservazioni prese a fondamento della loro determinazione, ma condurrebbero ad errori anche forti per tutte quelle che non si fossero fatte concorrere nella ricerca dei valori predetti. Ora la probabilità d'una formola è determinata non già dalla sua coincidenza con alcuni casi speciali, ma dai limiti estremi fra' quali stan comprese le differenze dei valori calcolati con quelli somministrati dal fatto; e quanto più sono ristretti tali limiti, tanto è maggiore la bontà della formola. Perchè i valori delle costanti riescano allora determinati nel modo il più proprio, è mestieri far concorrere tutte le esperienze alla loro determinazione, ed è noto che la formola che fosse così determinata deve soddisfare alla condizione che la somma dei quadrati degli errori sia un minimo, imperocchè sta a favore di una tal formola la probabilità della esattezza. Questo metodo, che è conosciuto sotto il nome del *metodo dei minimi quadrati*, già da lungo tempo adoperato in astronomia, e ognun sa con quanto successo, venne pure ultimamente introdotto pe' medii delle osservazioni meteorologiche, e dovrebbe sempre essere esclusivamente usato in tutte le altre scienze, nelle quali si presenti il bisogno di analoghe determinazioni.

E perchè quanto ora abbiamo detto riesca di più facile e comune intelligenza, non sarà qui inutile il soffermarsi alcun poco ad un esempio particolare. Supponiamo che sopra un piano qualunque si debba tracciare una retta colla condizione ch'essa debba passare per alcuni punti segnati nel piano medesimo. È evidente che se i punti proposti saranno due solamente, allora la retta sarà pienamente determinata, nè alcuna indecisione occorrerà nel suo tracciamento. Ma se i punti proposti fossero in numero maggiore di due, allora non potrebbe essere che per un caso al più alto grado improbabile ch'essi si trovassero esistere tutti in una retta medesima, anche se a questo scopo appunto fossero stati disposti da una mano e da un occhio fra i più esercitati. La retta allora che più si avvicinerà a soddisfare la condizione imposta pel suo tracciamento, sarà quella da cui quei punti si scostano meno che da un'altra qualunque, quella che passando a loro inframezzo tiene al più possibile ristretti i limiti delle estreme deviazioni dei punti medesimi. Ora è evidente che se condurremo una retta

la quale passi per due di quei punti scelti ad arbitrio, questa retta si scosterà più o meno dagli altri tutti, e le deviazioni loro potranno essere anche sensibilissime. Si tratta ora di cercare quale sia quella retta per cui tali deviazioni son minime, e a quest'uopo, meglio che qualunque altro, sopperirebbe il metodo de' minimi quadrati. Il caso ora accennato si presenta appunto allorquando, col solito metodo dell'ombre di eguale lunghezza, si voglia tracciare la linea meridiana in un piano orizzontale; chè i punti di mezzo degli archi attraversati dall'ombre eguali sarebbero in linea retta nel solo caso che non si fosse commesso alcun errore nel segnare que' punti, pei quali avvenne il passaggio negli archi predetti.

E per ritornare all'argomento, da cui il desiderio di rendere chiaro e palpabile lo scopo di questo mio scritto mi aveva per poco distolto, ricorderò aver detto che le osservazioni che noi prendiamo a fondamento delle nostre ricerche, possono essere affette d'errori più o meno grandi; lo che ci si renderà immediatamente evidente per poco che si considerino i mezzi d' interrogar la natura, che sono in nostro potere. Ogni esperienza che per noi si intraprende addomanda misura di quantità, e questa misura se alcune volte si presenta facile e spontanea, alcune altre invece esige pratiche e mezzi coi quali è impossibile raggiungere una scrupolosa esattezza. È quindi evidente che non si può sempre chiedere ad una formola il medesimo accordo col fatto, ma che si dee commisurare la sua convenienza alla bontà delle osservazioni, e non esigere dalla stessa risultamenti così prossimi agli osservati, che gli errori della formola sieno notabilmente al di sotto degli errori probabili dell'osservazione medesima.

Queste cose io andava meco stesso pensando nell'occasione di dovere stendere un libro di pratica idrometria per l'uso della mia scuola, e di dover in esso dettagliatamente trattare dei due problemi del movimento dell'acqua pe' lunghi tubi di condotta e per gli alvei; problemi, la cui soluzione cade appunto nel secondo caso da principio accennato.

È noto che ambedue le formole che guidano alle soluzioni desiderate poggiano sopra una particolare stima della resistenza dovuta al

soffregamento dell' acqua lungo le pareti del tubo entro cui scorre, o sopra il fondo e le sponde degli alvei ne' quali si muove. Portando la nostra attenzione sui varii elementi che possono influire sopra una tal resistenza, i quali sono il perimetro della sezione in immediato contatto coll'acqua, e che perciò appunto addomandasi *perimetro bagnato*, l'area della sezione, la velocità media dell'acqua, e finalmente pe' tubi la loro lunghezza, sarà facile il vedere che non tutti si devono comportare egualmente, ma che laddove la perdita cresce al crescer d'alcuni, deve invece diminuire all'aumentarsi di altri: così sarà dessa maggiore quanto è più grande il perimetro e la velocità, e minore invece quanto sarà maggior la sezione. Se non che questa sola cognizione non essendo sufficiente a fondarvi sopra una formola, è mestieri procedere ad un'ipotesi circa alla funzione che lega fra loro gli elementi accennati. La più semplice maniera di soddisfare a quella prima condizione essendo la ragione diretta e l'inversa, si tentò di rappresentare di tal modo le varie esperienze; e solo dopo aver veduto non accordarsi esse con un solo termine proporzionale al quadrato della velocità, si introdusse per questo elemento un nuovo termine semplicemente proporzionale alla velocità. La formola allora assunta a rappresentare la resistenza d'attrito è pei tubi

$$a\,\frac{C\,L}{S}\,v^2 + b\,\frac{C\,L}{S}\,v,$$

pegli alvei

$$a\,\frac{C}{S}\,v^2 + b\,\frac{C}{S}\,v,$$

dove C, S, v rappresentano il perimetro bagnato, la sezione e la velocità media, ed L la lunghezza del tubo; a e b sono poi le due costanti che restano a determinarsi, e che si vogliono in modo che pei tubi quella formola esprima altezza premente, pegli alvei forza acceleratrice.

Completata dal Coulomb nel modo ora accennato la formola per la resistenza d'attrito ne' tubi e negli alvei, il Prony s'accinse pel primo alla determinazione numerica delle due costanti a e b, e quindi

l'Eytelwein, i cui valori sono anche i più comunemente adoperati nella pratica, e la cui ricerca forma lo scopo d'una sua Memoria inserita fra quelle dell'Accademia di Berlino per gli anni 1814-1815, e negli *Annales des Mines*, tom. XI, pag. 417.

Ne' quadri che accompagnano quella Memoria trovasi fatto il confronto fra i valori della velocità somministrati dalla formola e quelli dati dall'esperienza; dal quale confronto sebbene risulti che la formola segue abbastanza davvicino l'esperienza, pure si vede ch'essa in molti casi se ne mantiene ancora così discosta, da far desiderare una più minuta discussione della formola stessa e risultamenti più prossimi ai veri.

E qui non posso a meno di non notare che il D'Aubuisson, nel suo corso d'idraulica ad uso degli ingegneri, adotta pe' tubi altri coefficienti, ricavati, siccome egli accenna, dalle esperienze del Couplet; ma quei coefficienti malamente s'accordano colle esperienze anche dell'istesso Couplet. E ciò io ho unicamente detto per mettere in guardia i pratici sull'uso di quei coefficienti, che proposti da autore di fama non dubbia, e messi in un libro meritamente stimato, potrebbero condurre ad errori non tollerabili.

Prima però di entrare in verun esame è necessario che ci soffermiamo alcun poco intorno ai dati che ci vengono somministrati dall'esperienze, ed alla probabilità maggiore o minore della loro esattezza. I dati che noi dobbiamo procurarci si riducono pei tubi, ordinariamente circolari, e tali in tutte le esperienze che si posseggono, al loro diametro, alla loro lunghezza, al carico d'acqua sul centro della bocca d'efflusso, e finalmente alla velocità media con cui l'acqua scorre per essi: pegli alvei, all'area della sezione, al perimetro bagnato, alla pendenza, e finalmente alla velocità media dell'acqua che corre entro i medesimi. Ora per poca pratica che si abbia di tali misure, è facilissimo lo scorgere che i dati relativi ai tubi si possono avere colla più sottil precisione, ed invece quelli che si riportano agli alvei non si possono ricavare dalle dirette misure se non con grossolano grado di approssimazione, ma nulla più; e che perciò laddove possiamo aspirare a molta esattezza per quei dati che spettano ai tubi,

dobbiamo invece accontentarci di una sufficiente approssimazione per quelli relativi agli alvei.

Conchiuderemo da ciò non essere tollerabile se non se piccolissimo errore nella formola che si riferisce ai tubi, ma potervi avere differenze ben maggiori in quella che agli alvei appartiene, poichè le istesse osservazioni che possono avere il merito di molta esattezza nel primo caso, possono essere affette d'errori più o meno notabili nel secondo. Non dovrà quindi recar meraviglia se nelle tavole di confronto fra i risultamenti della formola, e quelli somministrati dal fatto, si troverà notabile differenza fra quelle tavole che appartengono ai tubi, e quelle che inchiudono le esperienze sugli alvei: le note che alcune volte trovansi apposte ai quadri medesimi porranno in caso di giudicar facilmente la confidenza maggiore o minore che si può avere nell'esperienza medesima.

Possessori come noi siamo di un gran numero di pregevoli esperienze ed osservazioni, dobbiamo riprendere le formole stesse, e cercare di renderle tali che si scostino il meno possibile dall'esperienza.

Cominceremo dal considerare la formola che rappresenta la perdita in carico dovuta alla così detta resistenza d'attrito nei tubi, formola che pei tubi cilindrici si può scrivere sotto l'aspetto

$$a \frac{4L}{D} v^2 + b \frac{4L}{D} v,$$

essendo a e b le due costanti numeriche che si devono determinare, D il diametro della base.

Fatte concorrere tutte le esperienze insieme alla determinazione dei valori dei due coefficienti predetti, si trova che gli errori della formola sono troppo sensibili, per poter in pratica usar della stessa con abbastanza fiducia. È assai probabile che ciò avvenga soltanto per non esser la più propria quella funzione che si è assunta, e perchè i varii elementi che hanno diretta influenza nella stima di questa perdita, debbano entrare nella composizione della formola in modo diverso da quello che un primo aspetto e minor numero d'esperienze aveano fatto supporre.

Per procedere allora nel modo il più semplice, è necessario classificare le varie esperienze in gruppi, per ciascun dei quali sia costante uno dei quattro elementi che entrano nella formola; e vedere se una determinazione speciale dei due coefficienti per ciascun gruppo in particolare, conduca la formola così vicina all'esperienza, da indurre la fondata credenza ch'essa sia convenientemente posta rapporto agli altri elementi, cosicchè si possa supporre che sia sufficiente all'uopo variare la composizione della formola rapporto a quell'elemento soltanto. Fu questa l'idea che spinse Venturoli pel primo, e quindi il cavaliere di Gertsner a classificare le esperienze in rapporto al diametro. Questo istesso cammino venne pure da me seguito, ed è percorrendolo per intero che ho potuto raccogliere le conseguenze che ora sto per esporre.

Classificate dunque le esperienze secondo i varii diametri, e determinati per ciascun diametro gli speciali valori numerici di quelle costanti, si ha motivo di rimaner sorpresi dell'accordo della formola col fatto, attesochè gli errori della formola sono allora dello stesso ordine degli errori probabili dell'esperienza; ciò che si renderà evidente percorrendo le tabelle che accompagnano questo mio scritto. Dovrem dunque conchiudere essere giusta la composizion della formola rapporto alla lunghezza, al carico, alla velocità media, ma richiedere una correzione rapporto al diametro; unico elemento, a quanto sembra, la di cui influenza non sia esattamente espressa dalla formola superiore.

Dietro quanto abbiam detto è mestieri cercare se l'influenza di tale elemento si possa sottoporre a facile espressione, e completare con ciò la formola, senza però ch'essa perda notabilmente della sua semplicità; e solo se non ci riescisse di raggiungere un tale scopo, potremo servirci di quella formola, ma variando i valori dei coefficienti numerici secondo il variar del diametro, procurando di stendere un quadro dei loro valori in corrispondenza ai varii diametri, per ricorrere ad esso nei varii casi che la pratica può presentare.

A quest'uopo appunto io calcolai i coefficienti suddetti per tutti quei diametri pei quali si posseggono esperienze di non dubbia esat-

tezza, e questa tabella si troverà insieme al confronto colle esperienze, nel seguito di questo scritto. Le conseguenze che la tabella predetta (A) ci pone immediatamente sott'occhio, si compendiano nelle seguenti.

1.º I coefficienti numerici variano sensibilmente al variar del diametro.

2.º Queste variazioni sono molto pronunciate nel coefficiente della semplice velocità; non molto grandi per quello del quadrato della velocità stessa.

3.º Il coefficiente del quadrato della velocità diminuisce in principio col diametro, poi cresce invece al diminuir del medesimo presentando un minimo pel diametro di circa cinque centimetri.

4.º Il coefficiente della semplice velocità cresce continuamente al diminuir del diametro.

Costruendo le curve dei valori dei detti coefficienti si avranno quelle rappresentate in figura (Tavola I), dove la (a) esprime la curva di a, e la (b) quella di b; egli è mediante tali curve che si sono ottenuti i coefficienti medesimi pei diametri intermedii a quelli delle esperienze che si trovano nella tabella B, i quali valori però sono ben lungi dal meritare la fiducia dei primi.

Osservando che le variazioni si riportano principalmente sul secondo coefficiente, il quale cresce al diminuir del diametro, e che le variazioni di $b.\sqrt{D}$ sono piccole, come si può scorgere in figura, dove la curva di tali valori è la $(10\,b\sqrt{D})$, sembra che la formola da adottarsi pe' tubi debba essere la

$$\alpha \frac{4\,L}{D} v^2 + \beta \frac{4\,L}{D\sqrt{D}} v,$$

e che una variazione così semplice della formola sia sufficiente a dare alla formola stessa il carattere di una plausibile approssimazione. La curva corrispondente ci mostra però che pei piccoli diametri le variazioni son troppo sensibili, e che quindi la formola superiore non è propriamente applicabile se non pe' diametri superiori a un centimetro; allora nel calcolo dei coefficienti α e β converrà unicamente appigliarsi alle esperienze di Couplet, Bossut e Dubuat; e ciò avendo

io fatto, la mia supposizione venne pienamente avverata, come lo mostra il confronto colle esperienze riportato nel quadro n. VIII.

L'accordo coll'esperienza della formola pe' tubi è ben lungi dal continuare per quella che rappresenta la resistenza d'attrito negli alvei, del che le cause accennate in principio ci danno plausibile spiegazione. Per avvicinarla maggiormente al caso reale ho tentato dividere le varie esperienze in tre classi, e determinare i coefficienti per ciascuna in particolare. Questo metodo riescì in parte, cioè gli errori vennero attenuati, ma, e mi convien confessarlo, essi sono ancora tutt'altro che trascurabili. La divisione venne basata sul grado della velocità, e le tre classi appartengono a velocità inferiori ad un metro, a quelle comprese fra uno e due metri, e superiori a due metri, pel qual ultimo caso, disparendo il termine proporzionale alla sola velocità, la formola si riduce anche notabilmente più semplice, e varia soltanto un poco nel coefficiente numerico da quella alla quale il Tadini diede il nome di *canone pei canali e pei fiumi*. Forse, ed io sono il primo a confessarlo, una tal divisione non è la più propria, e sarebbe stato assai meglio classificare le dette esperienze rapporto alla pendenza; ma è così difficile di stimare esattamente la pendenza, ch'io ho creduto dover preferire il primo metodo, il quale infine vi fa in qualche modo concorrere anche la pendenza medesima.

Ho rigettato le esperienze che il Dubuat eseguì con piccoli canali artefatti di legno, imperciocchè esse si allontanan di troppo dai casi reali della pratica, nè sono paragonabili i dati che si possono ricavare per questi canali e pei fiumi, e quindi gli errori probabili dell'esperienze non essendo tutti del medesimo ordine, non sono paragonabili fra loro le esperienze medesime. Così pure trascurai le esperienze del Bertelli riportate dal Masetti nelle sue note all'idraulica del Venturoli, e ciò perchè non è detto come le velocità siensi osservate e perchè l'intestazione di portata dedotta indica che non fu essa osservata. Di più, l'accordo dei risultamenti del calcolo con quelli dell'osservazione, accordo a vero dire straordinario, e molto superiore a quello presentato dalle stesse osservazioni fondamentali, induce a dover ragionevolmente sospettare della loro esattezza.

Devo avvertire per ultimo che, dietro l' esempio di Eytelwein, invece di rendere minima la somma dei quadrati della quantità

$$H - \frac{v^2}{2g} - a\frac{4L}{D}v^2 - b\frac{4L}{D}v.$$

$$H - \frac{v^2}{2g} - \alpha\frac{4L}{D}v^2 - \beta\frac{4L}{D\sqrt{D}}v.$$

$$p - a\frac{C}{S}v^2 - b\frac{C}{S}v,$$

ho reso minima la somma dei quadrati dell' altre

$$av + b - \frac{D}{4Lv}\left(H - \frac{v^2}{2g}\right),$$

$$\alpha v + \frac{\beta}{\sqrt{D}} - \frac{D}{4Lv}\left(H - \frac{v^2}{2g}\right),$$

$$av + b - \frac{Sp}{Cv}.$$

Ciò infine non reca differenza notabile, e i coefficienti determinati in questa ultima maniera tenendo la formola un poco più vicina alla esperienza, ho creduto che meritassero la preferenza. In fine della Memoria si troveranno anche quelli che sarebbero somministrati dal metodo in primo luogo accennato.

Le formole fondamentali essendo pe' tubi

$$H - \frac{v^2}{2g} = a\frac{4L}{D}v^2 + b\frac{4L}{D}v,$$

oppure

$$H - \frac{v^2}{2g} = \alpha\frac{4L}{D}v^2 + \beta\frac{4L}{D\sqrt{D}}v.$$

e per gli alvei

$$p = a\frac{C}{S}v^2 + b\frac{C}{S}v,$$

dove H esprime il carico, p la pendenza; applicando il metodo dei minimi quadrati alle quantità superiormente indicate, e posto per brevità

$$\frac{D}{4Lv}\left(H - \frac{v^2}{2g}\right) = f$$

ed indicato con n il numero delle esperienze o delle osservazioni, si ha pei tubi

$$(1)\left\{\begin{aligned} a &= \frac{n\,\Sigma\, v\, f - \Sigma\, v\, \Sigma\, f}{n\,\Sigma\, v^2 - (\Sigma\, v)^2} \\ b &= \frac{\Sigma\, f\, \Sigma\, v^2 - \Sigma\, v\, \Sigma\, v\, f}{n\,\Sigma\, v^2 - (\Sigma\, v)^2} \end{aligned}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Sigma\,\frac{1}{D}\,\Sigma\, v\, f - \Sigma\,\frac{f}{\sqrt{D}}\,\Sigma\,\frac{v}{\sqrt{D}}}{\Sigma\,\frac{1}{D}\,\Sigma\, v^2 - \left(\Sigma\,\frac{v}{\sqrt{D}}\right)^2} \\ \beta &= \frac{\Sigma\, v^2\,\Sigma\,\frac{f}{\sqrt{D}} - \Sigma\,\frac{v}{\sqrt{D}}\,\Sigma\, v\, f}{\Sigma\,\frac{1}{D}\,\Sigma\, v^2 - \left(\Sigma\,\frac{v}{\sqrt{D}}\right)^2}\,; \end{aligned}\right.$$

e per gli alvei, ponendo

$$\frac{S\,p}{C\,v} = f.$$

si avranno i coefficienti a e b dalle stesse formole (1).

Pel calcolo poi dell' influenza che gli errori possibili nella stima dei dati possono avere sulla velocità, si avranno pei tubi le formole

$$\frac{\delta\, v}{v} = -\,\frac{\frac{b}{a} + v}{M\,v + N}\,.\,\frac{2\,a\,L}{D}\,.\,\frac{\delta\, L}{L}\,.$$

$$\frac{\delta\, v}{v} = \frac{\frac{b}{a} + v}{M\,v + N}\,.\,\frac{2\,a\,L}{D}\,.\,\frac{\delta\, D}{D}\,.$$

$$\frac{\delta\, v}{v} = \frac{1}{2\,v\,(M\,v + N)}\,\delta\, H.$$

dove per brevità si è posto

$$M = \frac{1}{2\,g} + a\,\frac{4\,L}{D}\,;\quad N = b\,\frac{2\,L}{D}\,;$$

e per gli alvei

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\frac{b}{a} + v}{\frac{b}{a} + 2v} \cdot \frac{\delta p}{p},$$

$$\frac{\delta v}{v} = -\frac{\frac{b}{a} + v}{\frac{b}{a} + 2v} \cdot \frac{\delta C}{C},$$

$$\frac{\delta v}{v} = -\frac{\frac{b}{a} + v}{\frac{b}{a} + 2v} \cdot \frac{\delta S}{S}.$$

Calcolati i coefficienti numerici si avrà poi la velocità dalle formole

pei tubi

$$v = \frac{-N + \sqrt{(MH + N^2)}}{M}$$

dove M ed N hanno i valori superiori per coefficienti speciali, e sono

$$M = \frac{1}{2g} + \alpha \frac{4L}{D} ; \quad N = \beta \frac{2L}{D\sqrt{D}}$$

pei coefficienti generali α e β.

Per gli alvei sarà

$$v = -\frac{1}{2} b + \sqrt{\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{Sp}{C} + \frac{1}{4} b^2\right)}.$$

Debbo avvertire infine che i valori dei coefficienti che ora son per riportare suppongono tutto misurato in metri.

QUADRO I.

Esperienze del Couplet con un tubo del diametro di 5 pollici parigini: corrispondenti a $0^m,13535$

Valori dei coefficienti

$a = 0,00028659$; $b = 0,00002807$; $\frac{b}{a} = 0,09794$

log. $a = 6,45727$ log. $b = 5,44825$ log. $\frac{b}{a} = 8,99099$

Confronto colle esperienze

Lunghezza L	Carico H	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
2280	0,6767	0,1441	0,1444	− 0,0019	− 0,060
	0,6497	0,1411	0,1407	+ 0,0027	− 0,056
	0,5707	0,1301	0,1297	+ 0,0033	− 0,059
	0,4534	0,1117	0,1118	− 0,0013	− 0,068
	0,3061	0,0854	0,0861	− 0,0078	− 0,087
	0,1592	0,0544	0,0542	+ 0,0049	− 0,062

Influenza degli errori probabili sui dati dell'esperienza
pel carico massimo e minimo

Esperienza	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta D = 0,001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\frac{\delta L}{L} = 0,001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta H = 0,001$
1ª	0,0046	0,0005	0,0009
6ª	0,0054	0,0006	0,0046

Avvertenza. Le esperienze del Couplet qui riportate sono quelle da lui eseguite a Versailles sul tubo che dalla Piazza di s. Antonio mette al serbatoio della Piazza Delfina. Molte altre esperienze si trovano nella Memoria del Couplet sopra altri condotti dello stabilimento medesimo, ma queste per essere ingombre troppo di straniere resistenze non si prestano ad un calcolo preciso.

QUADRO II.

Esperienze del Bossut con un tubo del diametro di pollici parigini 2,01: corrispondenti a $0^m,05441$

Valori dei coefficienti

$$a = 0,00025806\,; \qquad b = 0,000046\,; \qquad \frac{b}{a} = 0,17826$$

$$\log.\, a = 6,41174 \qquad \log.\, b = 5,66279 \qquad \log.\, \frac{b}{a} = 9,25105$$

Confronto colle esperienze

Lunghezza L	Carico H	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
9,745	0,6497	1,5945	1,5913	+ 0,0026	+ 0,063
id.	0,3248	1,0915	1,1057	— 0,0130	+ 0,087
19,490	0,6497	1,1640	1,1668	— 0,0024	— 0,029
id.	0,3248	0,7908	0,8038	— 0,0164	+ 0,000
29,235	0,6497	0,9682	0,9573	+ 0,0112	— 0,054
id.	0,3248	0,6444	0,6552	— 0,0168	— 0,019
38,981	0,6497	0,8364	0,8270	+ 0,0112	+ 0,015
id.	0,3248	0,5606	0,5630	— 0,0056	— 0,020
48,726	0,6497	0,7436	0,7360	+ 0,0102	+ 0,013
id.	0,3248	0,4954	0,4987	— 0,0107	— 0,033
58,471	0,6497	0,6695	0,6435	+ 0,0387	— 0,009
id.	0,3248	0,4433	0,4337	+ 0,0216	— 0,051

Influenza degli errori probabili sui dati dell'esperienza pel carico massimo e minimo nella massima e minima lunghezza

Esperienza	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta D = 0,001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\frac{\delta L}{L} = 0,001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta H = 0,001$
1ª	0,0077	0,0004	0,0008
2ª	0,0079	0,0004	0,0017
11ª	0,0099	0,0005	0,0009
12ª	0,0103	0,0005	0,0018

QUADRO III.

Esperienze del Bossut con un tubo del diametro di pollici parigini 1 ed $\frac{1}{3}$: corrispondenti a $0^m.0361$

Valori dei coefficienti

$$a = 0{,}00026\,; \qquad b = 0{,}00005605\,; \qquad \frac{b}{a} = 0{,}21556$$

$$\log.\ a = 6{,}41504 \quad \log.\ b = 5.74861 \qquad \log.\ \frac{b}{a} = 9{,}33357$$

Confronto colle esperienze

Lunghezza L	Carico H	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
9,745	0,6497	1,3150	1,3110	+ 0,0030	+ 0.031
id.	0,3248	0,8980	0,9025	— 0,0050	+ 0,006
19,490	0,6497	0,9317	0,9356	— 0,0042	— 0,008
id.	0.3248	0,6328	0,6360	— 0,0051	— 0,034
29,235	0,6497	0,7605	0,7566	+ 0,0051	— 0,020
id.	0,3248	0,5131	0,5098	+ 0,0064	— 0,010
38,981	0.6497	0,6502	0,6478	— 0,0037	— 0,035
id.	0,3248	0,4369	0.4329	+ 0,0093	— 0,068
48.726	0,6497	0,5697	0,5722	— 0,0044	— 0,054
id.	0,3248	0,3810	0,3798	+ 0,0031	— 0.055
58.471	0,6497	0,5119	0,5160	— 0,0080	— 0,067
id.	0,3248	0,3403	0,3404	— 0,0000	— 0,099

Influenza degli errori probabili sui dati dell'esperienza pel carico massimo e minimo nella massima e minima lunghezza

Esperienza	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta D = 0.001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\frac{\delta L}{L} = 0{,}001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta H = 0{,}001$
1ª	0,0128	0,0005	0,0008
2ª	0,0132	0,0005	0,0017
11ª	0,0159	0,0006	0,0009
12ª	0,0168	0,0006	0,0019

QUADRO IV.

Esperienze del Dubuat con tubi del diametro di 1 pollice di Parigi: corrispondente a $0^m,0271$

Valori dei coefficienti

$$a = 0,0002679; \qquad b = 0,00006069; \qquad \frac{b}{a} = 0,22657$$

$$\log. a = 6,42790 \qquad \log. b = 5,78310 \qquad \log \frac{b}{a} = 9,35520$$

Confronto colle esperienze

Lunghezza L	Carico H	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
3,1672	0,9745	2,2995	2,2719	+ 0,0120	+ 0,079
id.	0,7219	1,9301	1,9443	— 0,0073	+ 0,051
id.	0,4873	1,5784	1,5839	— 0,0035	+ 0,049
3,7320	0.5671	1,5918	1,6044	— 0,0079	+ 0.037
id.	0,1624	0,7942	0,8222	— 0,0351	— 0,019
id.	0,0189	0,2352	0,2353	— 0,0004	— 0,096
19,9505	0.6416	0,7761	0,7736	+ 0,0032	— 0,038
id.	0.3952	0,5916	0,5874	+ 0,0071	— 0,055
id.	0.3709	0,5677	0,5663	+ 0,0024	— 0,062
id.	0,3335	0,5411	0,5324	+ 0,0160	— 0,007
id.	0.2431	0,4500*	0,4418	+ 0,0182	— 0,068
id.	0.2431	0,4408*	0,4418	— 0,0022	— 0,087
id.	0,2106	0,4091	0,4053	+ 0,0093	— 0,086
id.	0,1605	0,3604	0,3434	+ 0,0471	— 0,067
id.	0,1137	0.2889*	0,2765	+ 0,0428	— 0,117
id.	0,1137	0,2826*	0.2765	+ 0,0215	— 0.098

Influenza degli errori probabili sui dati dell'esperienza pel carico massimo e minimo di tutte e tre le lunghezze esperimentate

Esperienza	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta D = 0,001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\frac{\delta L}{L} = 0,001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta H = 0,001$
1ª	0,0139	0,0004	0,0005
3ª	0,0142	0,0004	0,0011
4ª	0,0149	0,0004	0,0009
6ª	0,0199	0,0005	0,0332
7ª	0,0197	0,0005	0,0009
16ª	0,0207	0,0006	0.0017

Avvertenza. Furono lasciate le due ultime esperienze del Dubuat come quelle che essendo istituite coi piccolissimi carichi $0^m,0135$; $0^m,0041$, si risentivano troppo dei possibili errori d'osservazione.

Le esperienze segnate con asterisco nella tabella di confronto, sebbene eseguite nelle identiche circostanze, differiscono già fra loro, e gli errori sono del medesimo ordine dei più grandi dati dalla formola. Questa semplice osservazione mostrerà facilmente quanto la formola si approssimi al vero.

QUADRO V.

Esperienze del cav. di Gerstner con un tubo del diametro di pollici parigini 0,51: corrispondenti a $0^m,0138$

Valori dei coefficienti

$a = 0,00027817$; $b = 0,00010692$; $\frac{b}{a} = 0,38437$

log. $a = 6,44431$ log. $b = 6,02907$ log. $\frac{b}{a} = 9,58476$

Confronto colle esperienze

Lunghezza L	Carico H	Velocità osservata v	Velocità calcolata v	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
	1,2181	2,4092	2,4081	+ 0,0005	+ 0,0242
	1,0828	2,2604	2,2611	— 0,0003	+ 0,0201
	0,9475	2,1114	2,1067	+ 0,0022	+ 0,0197
	0,8121	1,9490	1,9406	+ 0,0043	+ 0,0175
	0,6768	1,7595	1,7601	— 0,0003	+ 0,0117
1,705	0,5414	1,5565	1,5609	— 0,0028	— 0,0015
	0,4060	1,3265	1,3344	— 0,0060	— 0,0154
	0,2707	1,0557	1,0665	— 0,0102	— 0,0372
	0,1354	0,7038	0,7189	— 0,0214	— 0,0897
	0,1083	0,6226	0,6307	— 0,0130	— 0,0975
	0,0812	0,5414	0,5311	+ 0,0225	— 0,0870
	0,0541	0,4331	0,4139	+ 0,0448	— 0,0924

Influenza degli errori probabili sui dati dell'esperienza

pel carico massimo e minimo

Esperienza	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta D=0{,}0005$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\frac{\delta L}{L}=0{,}001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta H=0{,}002$
1ª	0,0145	0,0005	0,0008
12ª	0,0189	0,0005	0,0201

Avvertenze. Si è preso l'errore probabile sul diametro di solo mezzo millimetro, perchè nel piccolo diametro che or si considera, è supponibile che sia stato misurato con maggiore cura questo influentissimo elemento. L'errore probabile in altezza si è assunto di due millimetri, perchè nelle esperienze originali non è tenuto conto che dei mezzi pollici di Parigi.

Le differenze fra le velocità osservate e le calcolate colla formola di Eytelwein furono ottenute usando della formola originale del medesimo, cioè colla

$$v=\frac{-L+\sqrt{\left\{L^2+(2750273\ L+189395917\ D)\ \dfrac{D\,H}{g}\right\}}}{\left\{122{,}98\ L+8469\ D\right\}\dfrac{1}{g}},$$

dove è noto che il g sta in luogo del comune $\frac{1}{2}g$, e che quindi, ridotta in metri, diventa

$$v=\frac{-L+\sqrt{\{L^2+(560777\ L+38617135\ D)\ D\,H\}}}{25{,}075\ L+1726{,}8\ D}.$$

Le differenze fortissime che si riscontrano, specialmente nelle ultime esperienze, e che sono ancor maggiori nelle tabelle di confronto che vengono in appresso, renderebbero in questi casi inapplicabile la formola superiore.

È però necessario avvertire che queste esperienze furono eseguite su tubi troppo corti per meritare un'intera fiducia. Ciò serva anche a giustificare in qualche modo il salto che si riscontra nei coefficienti.

Queste stesse avvertenze s'intendono valere anche per le esperienze che seguono del medesimo autore.

QUADRO VI.

Esperienze del cav. di Gerstner con un tubo del diametro di pollici parigini 0,39: corrispondenti a $0^m,01056$

Valori dei coefficienti

$a = 0,00030853$; $b = 0,00012462$; $\frac{b}{a} = 0,40393$

log. $a = 6,48930$ log. $b = 6,09560$ log. $\frac{b}{a} = 9,60631$

Confronto colle esperienze

Lunghezza L	Carico H	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
	1,2181	2,0844	2,0509	+ 0,0161	— 0,0290
	1,0828	1,9220	1,9253	— 0,0017	— 0,0510
	0,9475	1,7785	1,7914	— 0,0073	— 0,0611
	0,8121	1,6378	1,6475	— 0,0059	— 0,0656
	0,6768	1,4889	1,4759	+ 0,0087	— 0,0686
1,705	0,5414	1,3129	1,3203	— 0,0056	— 0,0816
	0,4060	1,1180	1,1226	— 0,0041	— 0,0966
	0,2707	0,8798	0,8668	+ 0,0148	— 0,1320
	0,1354	0,5847	0,5575	+ 0,0464	— 0,2073
	0,1083	0,5143	0,5162	— 0,0037	— 0,2057
	0,0812	0,4331	0,4310	+ 0,0048	— 0,2147
	0,0541	0,3519	0,3320	+ 0,0565	— 0,2240

Influenza degli errori probabili sui dati dell'esperienza pel carico massimo e minimo

Esperienza	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta D = 0,0005$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\frac{\delta L}{L} = 0,001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta H = 0,002$
1ª	0,0209	0,0004	0,0008
12ª	0,0278	0,0006	0,0221

QUADRO VII.

Esperienze del cav. di Gerstner con un tubo del diametro di pollici parigini 0,27: corrispondenti a $0^m,00731$

Valori dei coefficienti

$a = 0{,}0003165$ $b = 0{,}00010718$ $\frac{b}{a} = 0{,}33865$

$\log. a = 6{,}50038$ $\log. b = 6{,}03014$ $\log \frac{b}{a} = 9{,}52976$

Confronto colle esperienze

Lunghezza L	Carico H	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
	1,2181	1,7460	1,7364	+ 0,0055	— 0,0682
	1,0828	1,6350	1,6300	+ 0,0031	— 0,0746
	0,9475	1,5210	1,5157	+ 0,0035	— 0,0789
	0,8121	1,3941	1,3936	+ 0,0004	— 0,0882
	0,6768	1,2587	1,2608	— 0,0096	— 0,0977
1,705	0,5414	1,1099	1,1141	— 0,0038	— 0,1108
	0,4060	0,9339	0,9479	— 0,0149	— 0,1392
	0,2707	0,7255	0,7513	— 0,0355	— 0,1930
	0,1354	0,4873	0,4972	— 0,0203	— 0,2352
	0,1083	0,4331	0,4331	0	— 0,2359
	0,0812	0,3709	0,3609	+ 0,0269	— 0,2394
	0,0541	0,2978	0,2764	+ 0,0718	— 0,2428

Influenza degli errori probabili sui dati dell'esperienza pel carico massimo e minimo

Esperienza	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta D = 0{,}0005$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\frac{\delta L}{L} = 0{,}001$	$\frac{\delta v}{v}$ per $\delta H = 0{,}002$
1ª	0,0322	0,0005	0,0008
12ª	0,0419	0,0006	0,0218

TABELLA A

Quadro dei valori dei coefficienti che competono ai diametri particolari precedentemente discussi

D	a	b	$\frac{b}{a}$	$b\sqrt{D}$
0,13540	0,0002866	0,00002807	0,097940	0,00001033
0,05441	0,0002581	0,00004600	0,178260	0,00001073
0,03609	0,0002600	0,00005605	0,215560	0,00001065
0,02707	0,0002679	0,00006069	0,226570	0,00000999
0,01380	0,0002782	0,00010692	0,384370	0,00001257
0,01056	0,0003085	0,00012462	0,403930	0,00001280
0,00731	0,0003165	0,00010718	0,338560	0,00000916

TABELLA B

Quadro dei coefficienti che corrispondono a' varii diametri interpolati ai precedenti

D	a	b	$b\sqrt{D}$
0,01	0,000308	0,000124	0,0000124
0,02	0,000271	0,000075	0,0000106
0,03	0,000264	0,000060	0,0000104
0,04	0,000257	0,000052	0,0000104
0,05	0,000256	0,000048	0,0000107
0,06	0,000260	0,000043	0,0000105
0,07	0,000263	0,000038	0,0000101
0,08	0,000266	0,000036	0,0000102
0,09	0,000270	0,000034	0,0000102
0,10	0,000273	0,000032	0,0000101
0,11	0,000277	0,000030	0,0000100
0,12	0,000281	0,000029	0,0000100
0,13	0,000284	0,000028	0,0000101

QUADRO VIII.

Confronto colle esperienze dei sig. Couplet, Bossut e Dubuat della formola

$$H - \frac{v^2}{2g} = \alpha \frac{4L}{D} v^2 + \beta \frac{4L}{D\sqrt{D}} v$$

Valori dei coefficienti

$\alpha = 0{,}00026414$ $\beta = 0{,}000010251$

log. $\alpha = 6{,}42184$ log. $\beta = 5{,}01077$

Confronto colle esperienze

Osservatore	Velocità osservata v	Velocità calcolata v	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
Couplet	0,1441	0,1490	— 0,034	— 0,060
	0,1411	0,1420	— 0,006	— 0,056
	0,1301	0,1337	— 0,028	— 0,059
	0,1117	0,1152	— 0,031	— 0,068
	0,0854	0,0885	— 0,036	— 0,087
	0,0544	0,0555	— 0,020	— 0,062
Bossut serie I.	1,5945	1,5803	+ 0,009	+ 0,063
	1,0915	1,0992	— 0,007	+ 0,087
	1,1640	1,1590	+ 0,004	— 0,029
	0,7908	0,7993	— 0,011	0
	0,9682	0,9513	+ 0,017	— 0,054
	0,6444	0,6523	— 0,012	— 0,019
	0,8364	0,8222	+ 0,016	+ 0,015
	0,5606	0,5610	— 0,001	— 0,020
	0,7436	0,7321	+ 0,015	+ 0,013
	0,4954	0,4958	— 0,004	— 0,033
	0,6695	0,6646	+ 0,007	— 0,009
	0,4433	0,4497	— 0,014	— 0,051

Continuazione del quadro precedente

Osservatore	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
Bossut serie II.	1,3150	1,3060	+ 0,006	+ 0,031
	0,8981	0,9000	— 0,002	+ 0,006
	0,9317	0,9329	— 0,001	— 0,008
	0,6328	0,6352	— 0,003	— 0,034
	0,7605	0,7555	+ 0,006	— 0,020
	0,5131	0,5098	+ 0,006	— 0,010
	0,6502	0,6469	+ 0,005	— 0,035
	0,4369	0,4333	+ 0,008	— 0,068
	0,5697	0,5718	— 0,004	— 0,054
	0,3810	0,3806	+ 0,001	— 0,055
	0,5119	0,5160	— 0,008	— 0,067
	0,3403	0,3414	— 0,003	— 0,099
Dubuat	2,2995	2,2807	+ 0,008	+ 0,076
	1,9301	1,9517	— 0,011	+ 0,051
	1,5784	1,5892	+ 0,007	+ 0,049
	1,5918	1,6101	— 0,011	+ 0,037
	0,7943	0,8240	— 0,037	— 0,019
	0,2352	0,2345	+ 0,003	— 0,096
	0,7761	0,7756	+ 0,001	— 0,038
	0,5916	0,5883	+ 0,006	— 0,055
	0,5677	0,5671	+ 0,001	— 0,062
	0,5411	0,5329	+ 0,015	— 0,007
	0,4500	0,4403	+ 0,021	— 0,068
	0,4408		+ 0,001	— 0,087
	0,4091	0,4052	+ 0,009	— 0,086
	0,3604	0,3429	+ 0,048	— 0,067
	0,2889	0,2757	+ 0,046	— 0,117
	0,2826		+ 0,024	— 0,098

Confronto degli errori

Indicazione	Massimo positivo	Massimo negativo	Medio positivo	Medio negativo	Medio assoluto
Secondo Eytelwein	0,087	0,117	0,0428	0,0510	— 0,0088
Nuova formola	0,048	0,037	0,0117	0,0135	0,0000

OSSERVAZIONI SUGLI ALVEI

QUADRO IX.

Velocità inferiori ad un metro

$$v = \sqrt{\left(2904\ \frac{S\,p}{C} + 0{,}0082\right)} - 0{,}0906$$

che corrisponde ai valori dei coefficienti

$$a = 0{,}0003443\,; \qquad b = 0{,}00006237$$

Confronto colle osservazioni

Osservatore	$\frac{1}{p}$	$\frac{S\,p}{C}$	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
	27648	0,00001850	0,1509	0,1583	— 0,049	— 0,287
Dubuat	27648	0,00002143	0,1619	0,1548	+ 0,044	— 0,304
	21827	0,00002866	0,2006	0,2118	— 0,056	— 0,240
Wattman	11650	0,00003909	0,2809	0.2648	+ 0,057	— 0,060
Dubuat	32951	0,00004470	0,2867	0,2809	+ 0,020	— 0,109
Wattman	4571	0,00004407	0,3152	0,2818	+ 0,105	+ 0,060
Dubuat	15360	0,00005116	0,3333	0,3054	+ 0,084	— 0,026
	35723	0,00004973	0,3379	0,3001	+ 0,112	+ 0,002
Wattman	4800	0,00006500	0,4297	0,3533	+ 0,178	+ 0,092
Bonati	16366	0,00016130	0,6870	0.6000	+ 0,127	+ 0.080
Dubuat	6413	0,00027279	0,6927	0,7949	— 0,147	— 0,200
Pianigiani	2825	0,00018260	0,6960	0,7100	— 0,020	— 0,064
Bonati	16366	0,00022830	0,7360	0,7290	+ 0,009	— 0,030
Dubuat	6048	0.00024776	0,7465	0,7625	— 0,021	— 0,060
Brünnings	4931	0,00025482	0,7708	0,7744	— 0,005	— 0.047
Funk	92,3	0,00030830	0,7721	0,8600	— 0,114	— 0,147
	6701	0,00033055	0,9174	0,8934	+ 0,026	— 0,007
Brünnings	9045	0,00041940	0,9185	1,0168	— 0,107	— 0,136
	7957	0,00039322	0,9382	0,9819	— 0,046	— 0,071
	5825	0,00040357	0,9749	0,9958	— 0,022	— 0,044

Confronto degli errori

Indicazione	Massimo positivo	Massimo negativo	Medio positivo	Medio negativo	Medio assoluto
Secondo Eytelwein	0,092	0,304	0,0585	0,1139	— 0,0799
Nuova formola	0,178	0,161	0,0762	0,0597	+ 0,0082

Influenza degli errori sui dati dell'osservazione

Ammettendo che si commetta un errore di un ventesimo nella stima della sezione, di un decimo in quella del perimetro bagnato, di un cinquecentesimo in quella della pendenza, si avrà

$$\frac{\delta S}{S} - \frac{\delta C}{C} + \frac{\delta p}{p} = 0,05.$$

e quindi

$$\frac{\delta v}{v} = 0,05 \frac{v + \frac{b}{a}}{2v + \frac{b}{a}}.$$

Nel nostro caso l'errore probabile sarà

per la velocità minima **0,0344**

» massima **0,0271**

Avvertenze. Le osservazioni originali del Dubuat danno la velocità superficiale osservata, dalla quale si è dedotta colle solite regole la velocità media che comparisce nel quadro precedente. Le differenze grandissime che per tali osservazioni si riscontrano nella formola di Eytelwein dipendono dall'aver questo autore considerata la velocità superficiale invece della media. Pel calcolo di queste osservazioni si usò della formola originale d'Eytelwein, la quale somministra

$$v = -0,03319 + \sqrt{\left(2735,6 \frac{Sp}{C} + 0,0011\right)}.$$

Ho trascurato l'osservazione di Funk che nel quadro di Eytelwein comparisce al numero 28, perchè la troppa differenza tra il risultamento dell'osservazione e quello del calcolo fa ragionevolmente sospettare dell'esattezza dell'osservazione medesima.

QUADRO X.

Velocità comprese fra uno e due metri

$$v = \sqrt{\left(2610,1\ \frac{S\,p}{C} + 0,00029\right)} - 0,01692$$

Che corrisponde ai valori seguenti dei coefficienti

$a = 0,0003831$ $\qquad b = 0,\ 00001296$

Confronto colle osservazioni

Osservatore	$\frac{1}{p}$	$\frac{S\,p}{C}$	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
Funk	5223	0,0004214	1,0116	1,0321	— 0,020	— 0,024
	1987	0,0006903	1,0357	1,3255	— 0,279	— 0,295
	4009	0,0006612	1,0577	1,2966	— 0,226	— 0,240
	1987	0,0008178	1,2269	1,4442	— 0,177	— 0,193
	4009	0,0007176	1,2395	1,3518	— 0,091	— 0,104
	4009	0,0007593	1,3377	1,3910	— 0,032	— 0,052
	5223	0,0007749	1,4173	1,4054	+ 0,008	— 0,004
	4009	0,0008003	1,4506	1,4285	+ 0,015	+ 0,003
	3251	0,0007576	1,4676	1,3894	+ 0,053	+ 0,053
	1987	0,0009425	1,4908	1,5516	— 0,041	+ 0,007
	2222	0,0007184	1,5021	1,3526	+ 0,099	+ 0,089
	4009	0,0008512	1,5065	1,4737	+ 0,022	+ 0,009
	1817	0,0011338	1,5093	1,7034	— 0,128	— 0,145
	3251	0,0009570	1,5754	1,5636	+ 0,007	— 0,006
	4009	0,0009184	1,5979	1,5315	+ 0,041	+ 0,028
	1987	0,0010233	1,6007	1,6176	— 0,011	— 0,025
	4009	0,0009485	1,6085	1,5571	+ 0,032	+ 0,019
	1817	0,0012449	1,6267	1,7858	— 0,097	— 0,114
	4009	0,0009635	1,6634	1,5691	+ 0,057	+ 0,044
	4009	0,0010748	1,7356	1,6582	+ 0,044	+ 0,031

Continuazione del quadro precedente

Osservatore	$\frac{1}{p}$	$\frac{Sp}{C}$	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
Funk	1987	0,0011650	1,7576	1,7271	+ 0,011	+ 0,003
	1987	0,0012493	1,8204	1,7892	+ 0,022	+ 0,002
	1987	0,0013215	1,8693	1,8404	+ 0,015	0
	1817	0,0014986	1,9219	1,9631	— 0,021	— 0,017
	1817	0,0015619	1,9936	2,0021	— 0,004	— 0,020
Brünnings	9045	0,0004741	1,0383	1,0961	— 0,055	— 0,136
	6701	0,0004168	1,0396	1,0263	+ 0,012	+ 0,007
	7571	0,0003956	1,0923	1,0002	+ 0,084	+ 0,078
	4542	0,0005812	1,1218	1,2141	— 0,083	— 0,068
	9045	0,0005646	1,2100	1,1972	+ 0,010	0
	7957	0,0004652	1,2182	1,0952	+ 0,100	+ 0,010
	4931	0,0005791	1,2254	1,2127	+ 0,010	— 0,001
	5825	0,0006259	1,2742	1,2615	+ 0,009	— 0,001
	7957	0,0004473	1,2934	1,0613	+ 0,179	+ 0,191
	7957	0,0006512	1,2995	1,2871	+ 0,008	— 0,002
	7571	0,0006559	1,3041	1,2915	+ 0,008	— 0,002
	4009	0,0008378	1,4739	1,4620	+ 0,007	— 0,052
Bonati	10040	0,0007052	1,2690	1,3398	— 0,054	— 0,068
Ing. Pontif.	10040	0,0004647	1,1460	1,0850	+ 0,053	+ 0,045
	7657	0,0003725	1,1150	0,9820	+ 0,118	+ 0,124
Pianigiani	1863	0,0006099	1,3490	1,2450	+ 0,076	+ 0,078

Confronto degli errori

Indicazione	Massimo positivo	Massimo negativo	Medio positivo	Medio negativo	Medio assoluto
Secondo Eytelwein	0,191	0,295	0,0432	0,0723	0,0174
Nuova formola	0,179	0,279	0,0437	0,0878	0,0056

QUADRO XI.

Velocità superiori a due metri

$$v = 51{,}14 \sqrt{\frac{S\,p}{C}}$$

Confronto colle osservazioni

Osservatore	$\frac{1}{p}$	$\frac{S\,p}{c}$	Velocità osservata v	Velocità calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
Funk	1987	0,0016045	2,009	2,079	— 0,020	— 0,026
	1187	0,0016302	2,035	2,065	— 0,014	— 0,021
	1987	0,0015705	2,040	2,027	+ 0,006	+ 0
	1987	0,0016398	2,101	2,066	+ 0,013	+ 0,008
	1987	0,0017314	2,119	2,128	— 0,004	— 0,011
	1817	0,0019632	2,295	2,266	+ 0,011	+ 0.004
	1817	0,0022395	2,409	2,420	— 0,005	— 0,013
	1817	0,0021648	2,416	2,379	+ 0,016	+ 0,007

Gli errori medii delle formole sono
secondo Eytelwein — 0,0067
colla nuova + 0,0004

TABELLA C

Valori dei coefficienti determinati rendendo minima la somma dei quadrati delle quantità

$$H - \frac{v^2}{2\,g} - a\,\frac{4\,L}{D}\,v^2 - b\,\frac{4\,L}{D}\,v \quad \text{ec.}$$

Indicazione	a	b	$\frac{b}{a}$
Couplet	0,0002815	0,00002869	0,1019
Bossut serie I.	0,0002567	0,00004320	0,1682
» » II.	0,0002503	0,00006218	0,2483
Dubuat	0,0002669	0,00005850	0,2191
Gerstner serie I.	0,0002725	0,00011630	0,4269
» » II.	0,0002926	0,00015160	0,5184
» » III.	0,0003018	0,00012650	0,4191

I coefficienti α e β della formola generale determinati a render minima la somma dei quadrati della quantità

$$H - \frac{v^2}{2\,g} - \alpha\,\frac{4\,L}{D}\,v^2 - \beta\,\frac{4\,L}{D\sqrt{D}}\,v$$

sarebbero

$$\alpha = 0{,}00026811\,; \qquad \beta = 0{,}0000091323\,.$$

(*Letta il* 28 *Dicembre* 1845)

SUL PIÙ FACILE MODO

DI TROVARE LE RADICI REALI

DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE

E SOPRA UN NUOVO METODO

PER LA DETERMINAZIONE

DELLE RADICI IMMAGINARIE

MEMORIA

DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS

La formula che dà la risoluzione delle equazioni del terzo grado contiene due radici cube di quantità che bene spesso divengono immaginarie; in tal caso la formula non può riuscire di alcun pratico vantaggio, e siccome inutili furono tutti i tentativi per togliere alla medesima il suo aspetto immaginario, così quel caso si disse *irreducibile*, e si ritenne che la *compiuta* risoluzione delle equazioni non si estendesse oltre il secondo grado. Postomi a considerare questo caso irreducibile che tanto occupò gli analisti, immaginiamo, io diceva fra me, che non si sapesse eseguire se non le quattro prime operazioni aritmetiche; allora affatto inutili sarebbero le formule cardaniche, poichè l'estrazione delle radici cube non è riducibile ad altra operazione;

così per applicarle è necessario inventare una nuova operazione aritmetica, l'estrazione cioè della radice cuba: ora, io soggiungeva, questa operazione riguarda le sole quantità reali; inventiamo una nuova operazione aritmetica per estrarre le radici cube delle quantità immaginarie, e le formule cardaniche saranno applicabili ed utili anche nel caso irreducibile. Riguardando poi all'elegante processo di calcolo con cui il Ruffini (*Memorie della Soc. Ital.* XVI, 1813) insegnò ad estrarre le radici di qualunque grado, e seguendo una certa tal quale empirica analogia, trovai senza alcuno studio un'operazione moltissimo rassomigliante a quella del Ruffini, mediante la quale potei estrarre la radice cuba di una quantità immaginaria. Applicando tale operazione alle formule cardaniche, la risoluzione del caso irreducibile mi riuscì facile e sicura quanto l'estrazione di una semplice radice cuba; e siccome la risoluzione delle altre equazioni del terzo grado esige l'estrazione di una radice quadrata e di due cube, così meravigliava meco stesso che il caso irreducibile fosse in effetto il più facile da risolvere: se non che poco stante m'accorgeva che lo stesso processo di calcolo si applica senza bisogno delle formule cardaniche a tutte le equazioni del terzo grado, e che anzi poteva egualmente servire a trovare tutte le radici di un'equazione di qualsiasi grado. Ma dopo avere seguito per tal guisa lo sviluppo della mia idea, mi accinsi ad esaminare quanto vi fosse di nuovo in questa operazione ch'era l'ultimo risultamento del mio studio, e vidi ch'essa di poco differiva dal metodo del Budan, poichè nella stessa materiale disposizione del calcolo, all'atto ch'io aveva modificata quella del Ruffini, era caduto senza pensarlo in quella del Budan. Laonde prima di accennare che cosa io creda avere aggiunto alla risoluzione delle equazioni, e sotto quali riguardi io speri che la pubblicazione di questa Memoria non sia priva di utilità, indicherò brevemente alcuni punti del procedimento dell'algebra nell'importantissimo argomento della risoluzione delle equazioni.

Vieta, il primo che siasi occupato della risoluzione delle equazioni numeriche di un grado qualunque, riconobbe che molte equazioni si possono risolvere con operazioni analoghe alle estrazioni delle radici

dei numeri, e cercò un metodo *esegetico* che fondato sopra i soli principii del calcolo algebraico valesse alla risoluzione di tutte le equazioni. — Cartesio scoprì la regola dei segni, per la quale un'equazione non può avere più radici positive del numero delle sue variazioni di segno, e se le radici sono tutte reali il numero delle positive è precisamente uguale a quello delle variazioni: sicchè in questo ultimo caso si ha un modo facilissimo e sicuro per riconoscere quante radici sieno comprese in un dato intervallo; per esempio, se data un'equazione in x con tutte le radici reali, si domandi quante radici cadano tra 2 e 9, basterà formare l'equazione che ha per radici i valori di $(x-2)$, e quell'altra che ha le radici $(x-9)$; i numeri delle variazioni di segno di queste due equazioni trasformate mostreranno quante radici della proposta sieno maggiori di 2, e quante sieno maggiori di 9, e la differenza di questi due numeri indicherà perciò quante radici cadano nell'intervallo da 2 a 9.

Due oggetti si debbono avere in vista nella risoluzione delle equazioni: la separazione delle radici per togliere ogni pericolo di ometterne alcuna, ed il metodo per avvicinarsi indefinitamente al loro valore. A raggiungere il primo scopo Rolle osservò che fra due radici di una equazione è sempre compresa una radice della sua equazione *derivata*; per lo che se si conoscessero tutte queste ultime radici, basterebbe sostituirle successivamente nell'equazione proposta, e si avrebbe la sicurezza di separare tutte le radici; e siccome l'equazione *derivata* è inferiore di un grado all'equazione proposta, così mediante lo stesso teorema si può far dipendere la separazione delle radici dell'equazione *derivata* dalla risoluzione di altra equazione di grado inferiore ancora di una unità, e così a passo a passo si può discendere fino ad un'equazione del primo grado. — In quanto al secondo oggetto Newton diede la nota regola che è generale quanto il principio fondamentale del calcolo differenziale, da cui essa dipende.

Lagrange insegnò a separare tutte le radici sostituendo una progressione aritmetica di valori, la cui differenza fosse minore della minima differenza delle radici stesse; in tal guisa può richiedersi un numero grandissimo di sostituzioni estese a tutti gl'intervalli, anche a

quelli nei quali non sono comprese radici o vi sono comprese delle radici molto discoste e facili da separarsi: d'altra parte l'equazione, mediante la quale si determina una quantità minore della minima differenza, esige un calcolo laboriosissimo, sicchè il Fourier giustamente osservò che questa soluzione è soltanto teorica e d'impraticabile applicazione se il grado dell'equazione proposta sia alcun poco elevato. — Come metodo d'approssimazione il Lagrange sostituì le frazioni continue alle frazioni decimali.

Nel 1807 Budan pubblicò il suo metodo per la risoluzione delle equazioni numeriche di ogni grado; tre cose vi si possono osservare: l'algoritmo per calcolare successivamente mediante semplici addizioni o sottrazioni le trasformate in $(x-1)$, in $(x-2)$, in $(x-3)$,....; il criterio per conoscere in quali intervalli non cada alcuna radice; ed il metodo d'approssimazione: quest'ultimo è quello stesso che si adopera nella divisione e nell'estrazione delle radici, e che è una conseguenza del sistema decimale di numerazione; vale a dire si trova successivamente la cifra delle unità (o di altra classe superiore decine, centinaia, ecc.), poi quella dei decimi, poi quella dei centesimi, ecc., e dopo trovata ciascuna cifra si calcolano il residuo ed altri numeri che servono a trovare la cifra seguente. — L'algoritmo per calcolare le trasformate deriva da principii elementarissimi, ed è esso pure una imitazione di quanto si pratica nella divisione, come si vedrà più sotto: il Legendre in un rapporto all'Istituto di Francia giudicò tale algoritmo come facile conseguenza di cose già note. — Non si potrebbe approvare che il Budan, per conseguire lo scopo piuttosto curioso che utile di risolvere ogni equazione mediante le due sole prime operazioni dell'aritmetica, siasi astretto a calcolare ciascuna cifra della cercata radice ad una unità per volta, sicchè, per esempio, per calcolare la cifra 9 gli occorrono nove operazioni, mentre basterebbe una sola: se non che questa fu in parte una necessità dell'imperfetto criterio da lui adoperato per riconoscere la mancanza di radici. Questo criterio richiede certe trasformate *collaterali* che sono quelle che si calcolano quando si vuole sviluppare la radice in frazione continua, ed il Budan è costretto di adoperare tal criterio per assicurarsi della

mancanza di radici negli intervalli da 0 ad 1, da 1 a 2, da 2 a 3, ecc. — Del resto per quanto sia facile dimostrare l'algoritmo del Budan, e per quanto esso dipenda da principii elementari, è pur giusto riconoscere che da esso proviene in buona parte la speditezza del calcolo; e dee notarsi che quando si tratta di una effettiva applicazione pratica non basta dire semplicemente: calcolate la tal trasformata, determinate il tal valore; ma giova moltissimo indicare l'algoritmo più comodo per eseguire tali prescrizioni.

Il succitato metodo del Ruffini per le estrazioni delle radici dei numeri non è che un'applicazione particolare dell'algoritmo del Budan, colla differenza peraltro che il Ruffini non si ristringe ad operare con una sola unità alla volta, ma calcola colle cifre dall'1 al 9, appunto come sempre si fece nella divisione e nell'estrazione delle radici.

Non so intendere per qual motivo alcuni geometri attribuiscano al Budan la scoperta del teorema del Fourier, mentre il Budan non ha fatto che sospettarne la verità. Questo teorema, che è a mio credere il più importante fra quelli che servono alla numerica risoluzione delle equazioni, insegna che se una qualsiasi equazione abbia la trasformata in $(x-a)$ con m variazioni di segno, e la trasformata in $(x-b)$ con n variazioni, nell'intervallo tra a e b vi saranno tutto al più $m-n$ radici reali. Se si sapesse che l'equazione è priva di radici immaginarie, il teorema sarebbe, come dicemmo, una conseguenza di quello del Cartesio; fuori di questo caso il teorema del Cartesio ci farebbe certi che l'equazione non ha nè più di m radici maggiori di a, nè più di n maggiori di b, ma ci lascierebbe in dubbio sul numero delle radici comprese tra a e b. L'importanza del teorema del Fourier consiste in questo che se $m=n$, noi siamo certi che nessuna radice cade tra a e b; sicchè basta rivolgere il nostro esame a quegli intervalli nei quali si perde qualche variazione di segno, intervalli il cui numero non può mai eccedere il grado dell'equazione. Il Budan per assicurarsi che non vi sono radici per esempio fra 7 ed 8, ricorre alle trasformate collaterali anche quando le trasformate in $(x-7)$ ed in $(x-8)$ presentano lo stesso numero di variazioni, il che è prova

indubitata ch'egli non era sicuro del teorema da lui presentito; ed infatti nei §§ 39, 52 e nelle note (M) (T) egli dice d'aver forti motivi per credere che la regola del Cartesio possa estendersi anche alle equazioni aventi radici immaginarie, ma non potendo darne la dimostrazione ricorre sempre al predetto criterio.

Il Lagrange dichiarò (*Traité de la résolution etc.* 1808, *Note* VIII) che il metodo del Budan non lasciava niente a desiderare per la risoluzione delle equazioni che hanno tutte le radici reali; ma ad onta di questo autorevolissimo elogio sembra che tal metodo non sia stato accolto dagli analisti col favore che meritava; ne saranno state cagioni la lentezza dell'operazione procedente di unità in unità, e, per le equazioni aventi delle radici immaginarie, la difficoltà di distinguere gli intervalli privi di radici, appunto perchè non era ancora conosciuto il teorema del Fourier. Così nei trattati d'algebra si vede preferito il metodo del Lagrange, perchè in teorica esso presenta ogni sicurezza, quantunque in pratica non possa servire per le equazioni di grado alcun poco elevato.

Anche prima del Budan il Fourier avea fatto importanti lavori intorno alla teoria delle equazioni, ma fu tardo nel pubblicare le proprie scoperte; egli riguardò la risoluzione delle equazioni numeriche come un'operazione aritmetica assolutamente della stessa natura dell'estrazione delle radici, e che deve effettuarsi su tutti i coefficienti dell'equazione presi in una volta, mentre, se pur esistessero, inutili sarebbero quelle formule che esprimessero le radici mediante estrazioni di radici, e nelle quali la verità che si ricerca rimarrebbe più celata di quanto il fosse nell'equazione proposta. — Quantunque il Fourier siasi specialmente occupato dell'effettiva applicazione numerica, pure per calcolare le successive trasformate in $(x-a)$ anzichè adoperare un algoritmo analogo a quello del Budan (che da alcuni autori è attribuito all'Horner) pare ch'egli abbia sempre usato di cangiare x in $y+a$, e poscia sviluppare separatamente le potenze di questo binomio; e per adoperare il suo importantissimo teorema egli sempre suggerì di sostituire il valore a attribuito all'incognita x, tanto nel primo membro dell'equazione proposta, quanto in tutte le sue

derivate; calcolo questo non poco tedioso ed affatto inutile, poichè i coefficienti della trasformata in $(x-a)$ danno immediatamente i valori di tutte quelle derivate. Anche la dimostrazione del teorema è data dal Fourier mediante la considerazione delle funzioni derivate. Io farò vedere ch'essa risulta in modo più facile ed elementare da quello stesso algoritmo che serve alla formazione delle successive trasformate, e che dipende immediatamente dalla divisione algebraica.

Non basta trovare col mezzo del teorema del Fourier tutti gl'intervalli nei quali vi *possono* esser radici, bisogna inoltre distinguere quelli che in fatto ne mancano; il Fourier mediante considerazioni geometriche stabilisce a tal uopo un criterio che fu ampliato dal Lobatto (*Journ. de mathém. par Liouville* 1844). Nella presente Memoria esporrò un altro criterio più facile, il quale non richiede nè che la equazione sia liberata dalle radici eguali, nè che le due trasformate, fra le quali è compreso il dato intervallo, abbiano gli stessi segni in tutti i termini precedenti il penultimo; ed anzi non esige nemmeno che si conoscano ambedue le trasformate. Così questo criterio si può applicare a molto più larghi intervalli di quelli per cui può servire il criterio del Fourier, e molto minori avvertenze si richieggono nell'adoperarlo.

Separate che sieno le radici, il Fourier ritiene che il metodo di approssimazione più proprio ad avvicinarsi al valore delle radici sia quello del Newton, peraltro egli stabilisce molte condizioni necessarie perchè tale approssimazione lineare possa applicarsi con tutta sicurezza; bisogna assicurarsi che il primo membro della proposta equazione non abbia alcun fattore comune col suo *derivato secondo*, che tutte le *derivate* conservino i medesimi segni da un limite all'altro, bisogna scegliere il limite a cui dee applicarsi la formula d'approssimazione, ecc. Il Fourier cerca di rendere più speditivi i calcoli evitando tutte le ripetizioni di operazioni; ma mi sembra che molto meglio avrebbe raggiunto lo scopo, se in luogo di calcolare i valori delle derivate avesse considerati i coefficienti delle trasformate.

Da quanto ho accennato risulta, a mio credere, la soluzione più diretta e più facile del problema propostosi dal Lagrange: trovare i

valori esatti o quanto si voglia approssimati di una qualsiasi equazione numerica. I mezzi da adoperarsi sono: algoritmo per calcolare le trasformate; — teorema del Fourier per conoscere gli intervalli nei quali *possono* cadere radici; — criterio imperfetto, ma quasi sempre sufficiente, per distinguere fra questi intervalli quelli che mancano di radici; — teorema del Rolle per togliere ogni dubbio sulla separazione delle radici, e per isceglierе più opportunamente le successive posizioni quando si è ancor lungi dalle radici stesse; si noti che per applicare il teorema del Rolle non occorre trattare separatamente le varie equazioni derivate, poichè l'algoritmo che dà le trasformate della proposta equazione può servire a trovare non solo le radici della medesima, ma eziandio quelle di tutte le derivate.

Quantunque i precedenti principii sieno conosciuti, e forse solo mi appartenga quel criterio che credo vantaggiosamente sostituire a quelli del Budan, del Fourier, del Lobatto e di altri autori; pure mi sembra cosa opportuna presentare in tutta la sua semplicità la soluzione di quel problema che sì a lungo occupò gli analisti; ed intorno al quale si fecero tanti tentativi che per lo più non riuscirono di alcun vantaggio nella pratica esecuzione. Questa soluzione è così comoda da rendere affatto inutili le formule per le risoluzioni delle equazioni del terzo e del quarto grado ed anche del secondo, e da togliere perfino il desiderio della algebraica risoluzione di altre equazioni, poichè il calcolo delle formule sarebbe sempre più laborioso della diretta risoluzione dell'equazione. — Il Fourier conosceva tutto quanto occorre per dare questa semplicissima risoluzione, ma, come notai di sopra, non mi sembra che dalla sua opera postuma (1831) essa bastantemente apparisca. — Io mi proposi di esporre l'argomento in modo affatto elementare ed in guisa da non richiedere se non le prime nozioni dell'algebra; così mi dilungai in dettagliati esempii e mostrai come l'operazione aritmetica che serve a trovare approssimativamente ciascuna radice di un'equazione sia in qualche maniera un'estensione della divisione: mi pare che questa istruzione dovrebbe far parte dell'insegnamento elementare. La scienza è tanto vasta che non bisognerebbe arrestare lo studioso intorno a parziali ed imperfette riduzioni delle

equazioni; riduzioni tanto scarse di conseguenze teoriche, quanto prive di pratica utilità: ed invece gioverebbe che lo studioso apprendendo il modo generale per risolvere le equazioni algebraiche, si abituasse sempre più al calcolo numerico, senza del quale manca alle speculazioni teoriche ogni pratica applicazione.

Non mi limitai al calcolo aritmetico, ma esposi tutta quella parte della teoria delle equazioni che riesce opportuna per la loro risoluzione; nel che sembrami non indegno d'osservazione il modo con cui dimostrai il teorema del Fourier ed altri parecchi, fondandomi unicamente sulle regole di quel processo di calcolo, e senza ricorrere al calcolo differenziale od a nozioni equivalenti ad esso. Così la teorica elementare delle equazioni di ogni grado può insegnarsi in minor tempo di quello che suole impiegarsi intorno alla incompleta risoluzione delle equazioni del terzo e del quarto grado. Per teorica elementare delle equazioni intendo tutta quella parte che è necessaria o giova alla loro risoluzione, scopo precipuo della teorica stessa; ed escludo perciò le teoriche delle funzioni simmetriche delle radici e delle trasformazioni delle equazioni; elegantissime e profonde teoriche, ma delle quali l'algebra elementare può far senza; tanto più che lo scopo principale della teorica delle funzioni simmetriche era la risoluzione approssimata delle equazioni, e la trasformazione di queste tendeva, più che altro, a ricercare o dimostrare impossibile la loro risoluzione algebraica; cose tutte rese ora in certo modo inutili da un'operazione aritmetica che serve alla risoluzione delle equazioni di ogni grado.

Alcuno potrebbe forse contrapporre al metodo di approssimazione da me preferito quello notissimo del Newton, e notare che mentre nel primo si determinano ad una alla volta le cifre della cercata radice, invece con ogni ulteriore operazione del secondo si trova un numero di cifre esatte doppio di quello delle cifre trovate nell'operazione precedente. Abbiamo però accennato quante difficoltà si debbano superare (secondo lo stesso Fourier) nella prima applicazione del metodo del Newton; d'altronde ogni operazione di questo comprende una divisione, e ben si sa che nella divisione le cifre del quoziente si trovano ad una alla volta; e quando si sono calcolate tutte le cifre che si possono spe-

rare esatte, bisogna determinare un nuovo dividendo ed un nuovo divisore sostituendo il valore trovato nella data equazione e nella sua derivata, operazioni non poco lunghe: mentre nel calcolo del Budan si vanno successivamente calcolando il dividendo, il divisore e quegli altri numeri che servono alla loro formazione, e che particolarmente in sul principio del calcolo sono necessarii per trovare tutte le radici, e per evitare le difficoltà che presenterebbe il solo metodo del Newton. Si deve inoltre notare che anche nel nostro calcolo si potrebbe, mediante la divisione dei due ultimi termini (che sono appunto il divisore ed il dividendo del metodo newtoniano), determinare più cifre in una volta, e formare la *tabella* successiva con tutte queste cifre prese ad un tempo: peraltro ritengo che sarà più comodo calcolare una cifra per volta.

Mi conforta a credere che non sia inutile la mia pubblicazione il vedere che anche dopo il Budan ed il Fourier si continua ad insegnare parecchi metodi per la risoluzione delle equazioni, anzichè attenersi al più comodo; e che da alcuni analisti ne furono anche proposti di nuovi. Il Legendre nella *Théorie des nombres* (tom. II) risolve le equazioni che egli dice *omali* col metodo del Newton; riguardo all'equazione generale del grado $n.^{\text{esimo}}$ ogni successiva approssimazione richiede, secondo il metodo del Legendre, un'estrazione di radice $n.^{\text{esima}}$ oltre una non breve sostituzione; e quantunque sia possibile che si facciano molti calcoli inutili perchè non esista alcuna radice, pure l'autore giudica che il suo metodo sia il più semplice ed il più generale per la risoluzione delle equazioni numeriche. Egli propone eziandio un secondo metodo che a me sembra non poco laborioso.

Il Cauchy preferiva separare tutte le radici sostituendo nell'equazione una progressione aritmetica di valori colla differenza minore della minima differenza delle radici, ed il limite inferiore a questa differenza lo determinava con un calcolo diverso da quelli insegnati dal Lagrange: ma negli anni 1837 e 1840 il Cauchy trovò un altro metodo per la risoluzione delle equazioni, i cui vantaggi gli sembrarono talmente evidenti da dover esser posto in pratica da tutti gli analisti; all'approssimazione lineare del Newton egli sostituisce una

approssimazione mediante un'equazione del secondo grado, la quale ha il pregio di dare successivamente tutte le radici senza lasciarne fuori alcuna.

Molti analisti proposero di risolvere le equazioni mediante le serie ricorrenti; il Fourier osservò che tal metodo è generale, che non richiede alcuna anteriore cognizione, che serve tanto per le radici reali quanto per le immaginarie; ma notò inoltre che l'andamento dell'approssimazione è poco rapido e che esige troppo calcolo. — Quando si prendono i primi termini della serie ricorrente nel modo più opportuno quale fu insegnato dal Lagrange, le radici vengono a separarsi perchè in sostanza alle radici stesse si sostituiscono le loro potenze seconde, terze, quarte, quinte, ecc.; ora questo medesimo scopo è ottenuto ben più rapidamente nel metodo del Gräffe, col quale si trovano successivamente le trasformate che hanno per radici le potenze seconde, quarte, ottave, ecc. delle radici della proposta equazione.

Nella presente Memoria io espongo da prima in via affatto elementare e mediante parecchi esempii quel metodo di determinare le radici reali che mi sembra di gran lunga preferibile a tutti quelli precedentemente accennati. Vi aggiungo il calcolo delle radici in frazioni continue ed il teorema dello Sturm, acciocchè lo studioso trovi qui riuniti questi due importanti argomenti, quantunque io creda che ben di rado occorra adoperarli. Passo da poi ad una più difficile ricerca, a quella cioè delle radici immaginarie; il Legendre (Op. cit.) propose due metodi per determinare approssimatamente tali radici, ma riconobbe che essi sono molto imperfetti, e confessò che tale oggetto fu troppo trascurato dagli analisti. Spero che non sia indegno di attenzione il nuovo metodo da me esposto, che mi sembra tanto comodo quanto si può augurarsi in tal sorta di questione; vi si adoperano le solite trasformate in $(x-a)$, e per ciascuna trasformata si risolve od almeno si trova una radice di un'equazione il cui grado è inferiore alla metà del grado della proposta; quando si è alcun poco avvicinati ad un paio di radici immaginarie si calcola con tutta sicurezza una cifra decimale per ciascuna operazione, appunto come si fa

nella determinazione delle radici reali: per esser poi sicuri di non omettere alcun paio di radici si adopera una regola che ho dedotta dalla teoria degli *indici* del Cauchy.

Un' altra ricerca intorno a cui suole spendersi non poco tempo si è quella delle radici espresse da numeri interi: si suole suggerire di determinare tutti i divisori dell' ultimo termine sì della proposta equazione che delle sue trasformate in $(x-1)$ ed in $(x+1)$; tal calcolo potrebbe riuscire lunghissimo; d' altronde la compiuta risoluzione delle equazioni è tanto facile che credo doversene cercare tutte le radici, chè così per certo se ne troveranno le intere se esistono. Nulladimeno faccio anche vedere come con molta brevità si possa limitarsi alla ricerca delle radici reali, tentando successivamente quei numeri che soddisfanno a certe condizioni; e siccome si vanno sempre aggiungendo nuove condizioni, così i tentativi si riducono a pochi. — Anche per la ricerca dei fattori razionali di grado superiore al primo, credo che il metodo più comodo sarà quello di risolvere l' equazione proposta, poscia scegliere tra le sue radici quelle che danno per somma un numero intero. Pure aggiungo due metodi per la determinazione dei fattori razionali del secondo grado; nell' uno de' quali si escludono i divisori dell' ultimo termine che non soddisfanno a certe condizioni; nell' altro si calcolano per ciascun divisore le due equazioni, alle quali dovrebbe soddisfare il coefficiente del secondo termine del fattore ricercato, e così facilmente si scorge se tali equazioni abbiano veramente qualche radice intera comune.

La risoluzione delle equazioni conduce immediatamente alla decomposizione dei polinomii interi, la quale torna vantaggiosa nell' apparecchiare le formule ad una più comoda calcolazione numerica; si collega pure con questo argomento quell' altro della decomposizione delle formule razionali frazionarie. È noto che se abbiasi una formula frazionaria razionale rispetto ad una sola quantità letterale (mentre tutti i coefficienti sieno numerici) ed il numeratore sia di grado inferiore al denominatore, si può decomporre la formula in tante frazioni più semplici quanti sono i fattori del denominatore. Il metodo per eseguire una tal decomposizione occupò moltissimi analisti, i quali più spesso

vi impiegarono il calcolo differenziale, e taluno immaginò anche un nuovo calcolo per meglio risolvere il proposto problema: a me sembra che si abbia in tal guisa mirato alla elegante generalità del metodo, piuttostochè alla comodità del calcolo numerico; e credo che questa per se stessa elementarissima questione riesca più semplice trattata con metodo affatto elementare. Il metodo che mi sembra preferibile consiste nel togliere al denominatore della proposta formula un suo fattore del primo grado, sia poi esso semplice o multiplo non importa, poscia dividere per questo fattore del primo grado tanto il rimanente fattore del denominatore, quanto il numeratore della formula; i due quozienti e i due residui, che per tal guisa si ottengono, danno con brevissimo calcolo i numeratori delle due frazioni, nelle quali la proposta formula viene a separarsi. Se il fattore, anzichè del primo grado, sia del secondo, si richieggono quasi sempre quattro divisioni anzichè due sole.

I matematici dovrebbero rendersi abituale l'operazione aritmetica della risoluzione delle equazioni, quanto la moltiplica o la divisione, e troverebbero frequenti occasioni di adoperarla: la Nota IV ne contiene un esempio relativo all'interpolazione, che applico alla risoluzione di un'equazione composta di un piccolo numero di termini; colla qual applicazione credo di compiere quanto può importar di conoscere per la più comoda risoluzione numerica delle equazioni.

§ I.

Divisione e trasformazione dei polinomii

1. La risoluzione delle equazioni dipende per intero dalla divisione dei polinomii pei binomii; noi cominceremo prendendo per esempio il polinomio $2x^3 - 5x^2 + x - 7$ da dividersi pel binomio $x - 3$; la operazione potrà disporsi così:

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 - 5x^2 + x - 7 \\
 & \qquad + 6x^2 + 3x + 12 \\
\hline
x - 3 & 2x^2 + x + 4 \; + 5
\end{array}$$

dove $2x^2$ è il quoziente di $2x^3$ diviso per x, $6x^2$ è il prodotto di $2x^2$ per 3, x è il quoziente della somma dei termini che gli stanno di sopra divisa per x, e da quel x si dedusse il termine $3x$, che sommato con $+x$ e diviso per x diede il termine 4, il quale moltiplicato per 3 diede 12, che finalmente sommato a -7 diede $+5$; ed in tal modo $2x^3-5x^2+x-7$ diviso per $x-3$ offrì il quoziente $2x^2+x+4$ ed il residuo $+5$. Siccome il calcolo riguarda unicamente i coefficienti numerici, così potremo per brevità sopprimere la x e disporre il calcolo come qui si vede

$$\begin{array}{r|l} & 2-5+1-7 \\ \hline 3 & 2+1+4+5 \end{array}$$

dove è eseguito a memoria ciascun prodotto per 3 dei termini 2, 1, 4 successivamente ottenuti e la somma di tal prodotto col termine della prima riga. Si rammenti che $+5$ è il residuo, ed i precedenti $2+1+4$ sono i coefficienti del quoziente $2x^2+x+4$. Se occorra ulteriormente dividere l'ottenuto quoziente pel medesimo binomio $x-3$, si potrà proseguire l'operazione al di sotto della riga già scritta

$$\begin{array}{r|l} & 2-\ \ 5+\ \ 1-7 \\ \hline 3 & 2+\ \ 1+\ \ 4+5 \\ & 2+\ \ 7+25 \\ & 2+13 \\ & 2 \end{array}$$

dicendo 3 via 2 fa 6, che sommato col $+1$ dà $+7$ che si scrive; poscia 3 via $+7$ fa 21 che sommato con $+4$ dà $+25$; e similmente nella riga seguente, dopo scritto il 2, si dirà 3 via 2 fa 6 e $+7$ dà $+13$ che si scriverà. In tale maniera si sarà trovato che $2x^2+x+4$ diviso per $x-3$ dà il quoziente $2x+7$ ed il residuo $+25$, e che nuovamente $2x+7$ diviso per $x-3$ dà il quoziente 2 ed il residuo $+13$.

2. Colla precedente operazione si viene a conoscere che il proposto polinomio può presentarsi sotto le differenti forme

$$\begin{aligned} 2x^3-5x^2+x-7 &= (2x^2+x+4)(x-3)+5= \\ &= (2x+7)(x-3)^2+25(x-3)+5 \\ &= 2(x-3)^3+13(x-3)^2+25(x-3)+5. \end{aligned}$$

Questa semplicissima operazione è la base della risoluzione delle equazioni; talvolta ci arresteremo alla prima riga del calcolo, ed allora diremo che diviso il polinomio $2x^3 - 5x^2 + x - 7$ per $x - 3$ ci diede il quoziente $2x^2 + x + 4$ ed il residuo $+5$; più spesso dovremo compiere il calcolo soprascritto, che noi chiameremo una *tabella* di calcolo, e diremo di aver così trovati i coefficienti $2 + 13 + 25 + 5$ del *polinomio trasformato* in $x - 3$, il quale, se per brevità si ponga $x - 3 = x'$, può scriversi così:

$$2x'^3 + 13x'^2 + 25x' + 5\,;$$

il numero 3 con cui furono eseguiti tutti i calcoli, e che è quello che aggiunto ad x col segno — costituisce il *divisore* $x - 3$, lo diremo la *cifra* della *tabella*, perchè generalmente parlando esso sarà un numero formato di una sola cifra.

§ II.

Determinazione di una radice di qualunque equazione data

3. Le equazioni del precedente § 2 sono equazioni *identiche*, vale a dire trasformazioni di una medesima formula, perciò esse sono esatte qualunque sia il valore della x; le equazioni di cui ora noi ci dobbiamo occupare sono invece esatte solamente in quanto la x abbia un certo valore particolare, e dicesi *risoluzione dell'equazione* la ricerca del valore dell'incognita x, che rende soddisfatta l'equazione proposta. Così per esempio se sia data l'equazione $x^3 - x^2 = 14x - 24$ sarà facile verificare che essa non è soddisfatta quando in luogo di x pongasi per esempio il numero 5, poichè allora si ridurrebbe all'equazione evidentemente falsa $125 - 25 = 70 - 24$, ed invece essa è soddisfatta da $x = 2$ che la riduce $8 - 4 = 28 - 24$.

4. Se nell'equazione proposta per esempio si trasportino tutti i termini nel primo membro, ed essi si ordinino secondo le potenze della x, sicchè la si scriva così:

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0\,;$$

poscia si divida il polinomio che ne costituisce il primo membro pel

binomio $x - 2$ che risulta trasportando nel primo membro i termini dell'equazione $x = 2$ che esprime il valore dell'incognita, avremo

$$\begin{array}{r|l} & 1 - 1 - 14 + 24 \\ \hline 2 & 1 + 1 - 12 \quad\; 0 \end{array}$$

cioè si otterrà il residuo zero, e l'equazione potrà scriversi sotto la forma

$$(x^2 + x - 12)\,(x - 2) = 0\,;$$

e che il residuo debba essere nullo lo s'intende considerando che quando è $x = 2$ svanisce il valore del fattore $(x - 2)$, e perciò anche quello del suo prodotto pel valore, qualunque esso siasi, del quoziente $x^2 + x - 12$; sicchè l'equazione che dev'essere soddisfatta da $x = 2$ esige che anche il residuo della divisione del primo membro per $x - 2$ sia nullo, come nullo ne è il secondo membro. — Se il fattore $x^2 + x - 12$ si volesse dividere per $x - 2$ si avrebbe un residuo, ma se invece si divide per $x - 3$ si ottiene il quoziente $x + 4$

$$\begin{array}{r|l} & 1 + 1 - 12 \\ \hline 3 & 1 + 4 \quad\; 0 \end{array}$$

e nessun residuo; sicchè la proposta equazione può anche scriversi sotto la forma

$$(x + 4)\,(x - 3)\,(x - 2) = 0\,,$$

la quale rende palese che essa è soddisfatta non solamente da $x = 2$, ma anche da $x = 3$, ed anche da $x = -4$, ed inoltre si riconosce che niun altro valore di x varrebbe a soddisfarla, poichè tal valore non farebbe svanire nessuno dei fattori $(x + 4)$ $(x - 3)$ $(x - 2)$, e perciò nemmeno il loro prodotto. Viene da ciò che per la compiuta risoluzione di un'equazione non basta trovare un valore dell'incognita che la renda soddisfatta, ma bisogna trovare *tutti i valori* che hanno tal proprietà; questi valori si dicono le *radici* dell'equazione; così la precedente equazione ha le due radici positive 2, 3 e la radice negativa -4.

5. Generalizzando le considerazioni del § 4 si riconosce che una qualunque equazione *algebraica* (cioè formata di termini contenenti l'incognita elevata a potenze di esponente intero positivo) non può avere più radici di quello che sia il suo *grado*, cioè il più grande

degli esponenti dell'incognita, e che risolvere un'equazione o decomporre un polinomio in fattori del 1.° grado sono in sostanza una sola ricerca; così trovare le radici dell'equazione $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ o decomporre il polinomio $x^3 - x^2 - 14x + 24$ nei suoi fattori $x - 2$, $x - 3$, $x + 4$ sono due questioni sostanzialmente identiche; perchè le radici 2, 3, -4 sottratte dalla x danno i fattori, ed i fattori separatamente eguagliati a zero danno i valori dell'incognita, cioè le radici dell'equazione.

6. Ma le equazioni non hanno, generalmente parlando, le radici espresse da numeri tanto semplici e così facili da trovare come nell'esempio precedente; e bisogna invece ricercare il valore di ciascuna radice espresso approssimativamente mediante una frazione decimale. Debbasi risolvere l'equazione del primo grado

$$345\,x - 869 = 0$$

se ne dividiamo il primo membro per $x - 2$ col solito calcolo, cioè

$$\begin{array}{r|l} & 345 - 869 \\ \hline 2 & 345 - 179 \end{array}$$

moltiplicando 345 per 2 ed il prodotto 690 unendolo a -869 abbiamo -179; vale a dire si ottiene il quoziente 345 ed il residuo -179, ossia l'equazione può scriversi $345\,(x-2) - 179 = 0$. Moltiplichiamo questa equazione per 10 e poniamo x' in luogo di $10\,(x-2)$; avremo la nuova equazione $345\,x' - 1790 = 0$, il cui primo membro diviso per $x' - 5$ dà il quoziente 345 ed il residuo -65, perciò essa

$$\begin{array}{r|l} & 345 - 1790 \\ \hline 5' & 345 - 65 \end{array}$$

può scriversi così $345\,(x'-5) - 65 = 0$, che moltiplicata per 10 e posto $10\,(x'-5) = x''$ diventa $345\,x'' - 650 = 0$ che potremo dividere per $x'' - 1$, e continuare nello stesso modo quanto ci piaccia. I calcoli numerici potranno disporsi più brevemente come qui si vede:

$$\begin{array}{r|l} & 345 - 650 \\ \hline 1'' & 345 - 305 \end{array}$$

ed osservando che

$$x - 2 = \frac{x'}{10}, \quad x' - 5 = \frac{x''}{10}, \quad x'' - 1 = \frac{x'''}{10}, \quad \text{ecc.}$$

vedremo che

$$x=2+\frac{5}{10}+\frac{1}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10000}=2{,}5188\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 345-869 \\ \hline
2 & 345-1790 \\ \hline
5' & 345-650 \\ \hline
1'' & 345-3050 \\ \hline
8''' & 345-2900 \\ \hline
8'' & 345-140
\end{array}$$

L'operazione da noi fatta non consiste in altro che nella divisione del numero 869 pel numero 345: noi ci siamo arrestati intorno alla medesima solamente perchè l'operazione con cui si risolve un'equazione di qualunque grado è fondata sullo stesso principio della precedente; si tratta sempre di trasformare la proposta equazione in x in un'altra in

$$x-a=\frac{x'}{10},$$

dove bisogna che il numero intero a sia tale che x' riesca minore di 10; poscia l'equazione in x' si trasformerà in un'altra in

$$x'-b=\frac{x''}{10},$$

essendo $x''<10$, ecc. sicchè in fine si ottenga

$$x=a+\frac{b}{10}+\text{ecc.}$$

7. Nel predetto caso di un'equazione del 1.° grado l'aritmetica offre delle regole sicure per iscegliere le *cifre* 2, 5', 1'', ecc. in guisa che non sieno nè troppo piccole nè troppo grandi. Supponiamo di non conoscere tali regole e vediamo quali inconvenienti e quali rimedii si avrebbero. Suppongasi in primo luogo che dopo ottenuti i coefficienti della trasformata in $x'=10(x-2)$ $\quad 345\,x'-1790=0$,

$$\begin{array}{r|l}
 & 345-869 \\ \hline
2 & 345-1790 \\ \hline
4' & 345-4100 \\ \hline
9'' & 345-9950 \\ \hline
9''' & 345-68450
\end{array}$$

si adoperi la cifra $4'$ (anzichè la giusta 5) e si giunga così alla trasformata $345(x'-4)-410=0$: se si continuasse il calcolo è palese che si avrebbero dei residui 995, 6845, ecc. sempre più grandi; ma se noi divideremo il primo membro della $345(x'-4)-410=0$ (non moltiplicata per 10) per $(x'-4)-1$ avremo la trasformata in $x'-5$ $345(x'-5)-65=0$; poscia procederemo come al § 6.

$$\begin{array}{r|l} & 345-869 \\ \hline 2 & 345-1790 \\ \hline 4' & 345-410 \\ \hline 1' & 345-65 \end{array}$$

Dunque quando una cifra è minore del giusto, vi si rimedia facendo il calcolo colla cifra 1 (si suppone che l'errore sia di una sola unità) e *ciò senza moltiplicare l'ultimo termine* per 10. Del resto potrà riuscir più comodo cancellare la riga calcolata colla cifra $4'$, e sostituirvene un'altra calcolata colla cifra $5'$.

8. Supponiamo in secondo luogo che siasi presa la *cifra* troppo grande 3: il prodotto $3.345=1035$ unito a -869 dà un *residuo* $+166$ di *segno opposto* a quello dell'*ultimo termine* -869; questo sarà *sempre* indicio che la cifra adoperata fu troppo grande; se non

$$\begin{array}{r|l} & 345-869 \\ \hline 3 & 345+166 \\ \hline -1 & 345-1790 \\ \hline 5' & 345-650 \\ \hline 2'' & 345+40 \\ \hline -1'' & 345-3050 \\ \hline 8''' & 345-290 \end{array}$$

si preferisca cancellare la riga già scritta, si potrà operare colla cifra negativa -1, la quale darà il prodotto $-1.345=-345$ che unito con $+166$ dà il residuo -179. Si procedette al solito colla cifra giusta $5'$, e continuando si adoperò la cifra $2''$ più grande del giusto, il che si corresse colla cifra negativa $-1''$, e raccogliendo tutte le cifre trovate si vede che

$$x=3-1+\frac{5}{10}+\frac{2-1}{100}+\frac{8}{1000}+\text{ecc.}=2,518\ldots.$$

Del resto anche in questo caso riesce più comodo cancellare i calcoli fatti colle *cifre* troppo grandi, e ridursi sempre al calcolo del § 6.

9. Proponiamoci adesso di trovare il valore della radice positiva dell'equazione del 3.° grado

$$2x^3 + 5x^2 + 7x - 188 = 0$$

dividendone il primo membro per $x - 3$, poscia ancora il quoziente per $x - 3$ ed il nuovo quoziente dividendolo ancora per $x - 3$, noi otterremo mediante la seguente tabella di calcolo (§ 2) i coefficienti

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 + 5 + 7 - 188 \\
\hline
3 & 2 + 11 + 40 - 68 \\
 & 2 + 17 + 91 \\
 & 2 + 23 \\
 & 2
\end{array}$$

$2 \; + 23 \; + 91 \; - 68$ dell'equazione trasformata in $x - 3$

$$2(x-3)^3 + 23(x-3)^2 + 91(x-3) - 68 = 0.$$

Giova avvertire di non abbandonare una tabella senza essersi ben assicurati di non avervi commesso qualche errore; così al compiere della seconda riga dopo aver calcolato $3 \times 17 + 40 = 91$ si sommeranno da parte i due numeri $11 + 17 = 28$ e si osserverà se $3 \times 28 + 7 = 91$; così pure al compiere della terza riga si sommeranno i tre 2 della prima colonna, poscia si osserverà se $3 \times 6 + 5 = 23$. La predetta trasformata moltiplicata per 1000, poscia postovi

$$x - 3 = \frac{x'}{10},$$

si cangia nella

$$2x'^3 + 230x'^2 + 9100x' - 68000 = 0,$$

i cui coefficienti sono quelli stessi della precedente rispettivamente moltiplicati pei termini della progressione decupla 1, 10, 100, 1000. Dividiamo adesso il primo membro di questa equazione per $x' - 6$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 + 230 + 9100 - 68000 \\
\hline
6' & 2 + 242 + 10552 - 4688 \\
 & 2 + 254 + 12076 \\
 & 2 + 266
\end{array}$$

e colla solita tabella otterremo i coefficienti della trasformata

$$2(x'-6)^3 + 266(x'-6)^2 + 12076(x'-6) - 4688 = 0;$$

e nuovamente moltiplicandone i coefficienti per **1**, **10**, **100**. **1000** avremo la trasformata

$$2\,x''^3+2660\,x''^2+1207600\,x''-4688000=0$$

essendo

$$x'-6=\frac{x''}{10}\,.$$

Su questi ultimi coefficienti si potrebbe operare nel solito modo colla cifra **3**$''$; ma nel caso che non si voglia spingere l'approssimazione molto innanzi, l'operazione riuscirà più speditiva tagliando, per esempio, tre cifre a ciascun numero e calcolando l'unita tabella coll'om-

$$\begin{array}{r|l}
 & 0{,}002+2{,}66+1207{,}6-4688 \\ \hline
3'' & ,002+2{,}67+1215{,}6-1041 \\
 & ,002+2{,}68+1223{,}6 \\
 & ,002+2{,}69
\end{array}$$

mettere sempre le ultime cifre nel modo che riuscirà facilissimo a chi sia alcun poco abituato al calcolo delle decimali. I coefficienti **0,002 +2,69 +1223,6 —1041** che così si ottengono si moltiplicheranno rispettivamente pei termini della progressione decupla **0,001**, **0,01**, **0,1**, **1** e si procederà nel modo solito al calcolo della successiva tabella colla cifra **8**$'''$, e così di seguito; ed in fine raccogliendo tutte

$$\begin{array}{r|l}
 & 0{,}03+122{,}4-1041 \\ \hline
8''' & ,03+122{,}6-\quad 60 \\
 & ,03+122{,}8
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 12{,}3-\quad 60 \\ \hline
4^{IV} & 12{,}3-\quad 11 \\ \hline
9^{V} & 1{,}2\qquad 0
\end{array}$$

le cifre trovate si avrà per la radice cercata il valore $x=3{,}63849$.

10. Nulla si disse finora sul modo di trovare le cifre colle quali sono calcolate le precedenti tabelle; vediamo quali inconvenienti e quali ripieghi si avrebbero nel caso che si sbagliassero tali cifre. Supponiamo che da prima siasi adoperata la cifra troppo piccola **2**; se procedessimo alla seconda tabella coi numeri **2+170+3100—138000** si vedrebbe che anche adoperando la massima cifra **9**$'$ non si toglierebbe che non andasse sempre aumentando il rapporto dell'ultimo

termine coi precedenti, mentre invece si dee avere in vista di renderlo il più piccolo possibile; noi dunque non moltiplicheremo i trovati coefficienti $2 + 17 + 51 - 138$ per la solita progressione decu-

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 + 5 + 7 - 188 \\
\hline
2 & 2 + 9 + 25 - 138 \\
 & 2 + 13 + 51 \\
 & 2 + 17 \\
\hline
1 & 2 + 19 + 70 - 68 \\
 & 2 + 21 + 91 \\
 & 2 + 23
\end{array}$$

pla, bensì ripeteremo su di essi il solito calcolo colla nuova cifra 1, e giungeremo precisamente agli stessi coefficienti $2 + 23 + 91 - 68$ che si sarebbero trovati operando a bella prima colla cifra 3: e si noti che l'ultimo termine -68 della prima riga ci avverte col suo segno che veramente la cifra 2 era troppo piccola. Siccome la soverchia grandezza dell'ultimo termine -138, e quindi la troppa piccolezza della cifra 2, potrà quasi sempre arguirsi dalla sola prima riga $2 + 9 + 25 - 138$ della tabella, così in pratica potrà riuscir più comodo di cancellare la riga già scritta e procedere alla formazione della tabella colla cifra 3.

11. Supponiamo in secondo luogo che siasi cominciato il calcolo colla cifra troppo grande 4; al compiere della prima riga della tabella noi troveremo che il residuo $4 \times 59 - 188 = +48$ ha segno opposto dell'ultimo termine superiore -188, e questo è indicio sicuro che la cifra adoperata fu troppo grande; per rimediare a ciò dopo compiuta la tabella adopreremo la cifra negativa -1, e con

$$\begin{array}{r|l}
 & 2 + 5 + 7 - 188 \\
\hline
4 & 2 + 13 + 59 + 48 \\
 & 2 + 21 + 143 \\
 & 2 + 29 \\
\hline
-1 & 2 + 27 + 116 - 68 \\
 & 2 + 25 + 91 \\
 & 2 + 23
\end{array}$$

una nuova tabella (nella quale dovrà dirsi -1 via 2 fa -2 che unito con $+29$ dà $+27$, -1 via $+27$ fa -27 e $+143$ dà $+116$, -1 via $+116$ fa -116 e $+48$ dà -68, ecc.) saremo ricondotti

a quegli stessi coefficienti che si ottengono operando immediatamente colla cifra 3. Del resto riuscirà quasi sempre più comodo cancellare la prima riga calcolata colla cifra troppo grande 4, e ricominciare il calcolo colla 3.

12. Quello che abbiamo detto in riguardo alla prima tabella, si dirà di tutte le seguenti nel caso ch' esse si calcolassero con cifre o troppo grandi o troppo piccole; ma si noti che in fatto sarà quasi sempre facile prevedere qual sia la cifra da adoperarsi avendo in vista che lo scopo si è di ridurre il *più piccolo possibile* il residuo procedente dalla prima divisione, mantenendolo però dello stesso segno dell'ultimo termine che gli sta di sopra. Generalmente parlando nel progredire dell'operazione la scelta delle cifre è tanto sicura, quanto se si trattasse di una semplice divisione di due numeri, e l'operazione va sempre più riducendosi ad una divisione.

13. Bisogna peraltro confessare che nel precedente esempio la radice si è facilmente presentata. Come si opererà negli altri casi, e quali avvertenze specialmente dovranno aversi per esser certi di trovare tutte le radici della proposta equazione? Per poter compiutamente soddisfare a questa giustissima esigenza premetteremo l'esposizione delle principali proprietà delle equazioni, che noi vedremo nascere spontanee dall'operazione stessa che conduce alla determinazione di ciascuna radice in particolare; ma prima aggiungeremo un altro esempio di questa operazione.

14. Si ricerchi la radice positiva dell'equazione

$$x^3 - 54500 = 0 .$$

Prima di tutto vi si aggiungano i termini mancanti dando ad essi i coefficienti nulli, sicchè l'equazione

$$x^3 + 0 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x - 54500 = 0$$

ci mostrerà che dobbiamo formar la tabella cominciando coi numeri $1 + 0 + 0 - 54500$. Non è difficile riconoscere che la cifra 9 sarebbe troppo piccola; prenderemo adunque una cifra di decine, e siccome 40 sarebbe evidentemente troppo grande, così opereremo colla cifra 30: compiuta la prima tabella si procederà alla seconda cominciando colla cifra 8 che sembrerebbe opportuna, ma che in fatto si trova

esser troppo grande, sicchè si riprenderà il calcolo colla cifra **7**.

	1 +	0 +	0	− 54500
30	1 +	30 +	900	− 27500
	1 +	60 +	2700	
	1 +	90		
(8)	(1) +	(98) +	(3484) +	(372)
7	1 +	97 +	3379 −	3847
	1 +	104 +	4107	
	1 +	111		
	0,01 +	11,1 +	4107	− 38470
9′	0,01 +	11,19 +	4207,7 −	601
	,01 +	11,28 +	4309,2	
	.01 +	11,37		
		0,11 +	430,9 −	601
1″		,11 +	431,0 −	170
		,11 +	431,1	
			43,1 −	170
4‴			43,1 +	2

Volendo limitarmi a poche decimali moltiplicai i risultanti coefficienti **1 + 111 + 4107 − 3847** per la progressione decupla **0,01 0,1 1 10** (anzichè per la **1, 10, 100, 1000**) e continuando nello stesso modo trovai la radice $x = 57{,}914$.

15. Il valore precedentemente trovato è quello la cui terza potenza è $= 54500$, esso si dice la *radice terza* di questo numero; si vede perciò che l'operazione per estrarre la radice di una quantità non è in niente più facile dell'operazione colla quale si determina immediatamente la radice di una data equazione, sicchè portano poco o nessun vantaggio pratico le formule mediante le quali in rarissimi casi si può ridurre la risoluzione delle equazioni ad estrazioni di radici di quantità.

§ III.

Teoria elementare delle equazioni algebraiche

16. Noi dedurremo le principali proprietà delle equazioni dalla operazione mediante la quale (§ 2) dato un polinomio in x si ottiene il suo trasformato in $(x-a)$, operazione che prendendo per esempio il polinomio generale del 4.° grado

$$(1)\quad Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

è espressa dalla tabella

$$\begin{array}{c|l}
 & A+B+C+D+E \\ \hline
a & A+B_1+C_2+D_3+E_4 \\
 & A+B_2+C_3+D_4 \\
 & A+B_3+C_4 \\
 & A+B_4 \\
 & A
\end{array}$$

dove

$$\begin{array}{llll}
B_1=aA+B\,, & C_2=aB_1+C\,, & D_3=aC_2+D\,, & E_4=aD_3+E \\
B_2=aA+B_1\,, & C_3=aB_2+C_2\,, & D_4=aC_3+D_3 & \\
B_3=aA+B_2\,, & C_4=aB_3+C_3 & & \\
B_4=aA+B_3 & & &
\end{array}$$

ed il polinomio trasformato è

$$(2)\quad A(x-a)^4+B_4(x-a)^3+C_4(x-a)^2+D_4(x-a)+E_4\,.$$

Abbiamo già notato che i numeri di ciascuna riga della tabella sono i coefficienti del quoziente ed il residuo del polinomio che ha per coefficienti i numeri della riga superiore diviso per $x-a$, sicchè

$$(3)\quad Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=(Ax^3+B_1x^2+C_2x+D_3)\,(x-a)+E_4$$

$$(4)\quad Ax^3+B_1x^2+C_2x+D_3=(Ax^2+B_2x+C_3)\,(x-a)+D_4$$

ecc.

17. Ricordiamo da prima (§ 4) che essendo la (3) un'equazione identica, il valore che prende il primo membro quando vi si pone $x=a$ è uguale a quello che prende in tal caso il secondo membro cioè $Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E=E_4$, dunque: «se a è una *radice* dell'equazione $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ il suo primo mem-

bro diviso per $x-a$ dà un residuo nullo». Viceversa si vede ugualmente che se il primo membro dell'equazione $Ax^4 \ldots + E = 0$ diviso per $x-a$ dà il residuo nullo, essendo identicamente $Ax^4 \ldots + E = (Ax^3 + B_1 x^2 + C_2 x + D_3)(x-a)$ l'equazione avrà la radice a, ed inoltre tutte le radici dell'equazione di grado inferiore di un'unità $Ax^3 + B_1 x^2 + C_2 x + D_3 = 0$; ne viene che «un'equazione potrà avere tutto al più tante radici quant'è il suo grado».

18. Se il valore di a renda nello stesso tempo $E_4 = 0$ e $D_4 = 0$, siccome la $Ax^4 \ldots + E = 0$ ha oltre la radice a tutte quelle della $Ax^3 + B_1 x^2 + C_2 x + D_3 = 0$, che in tal caso è identica colla $(Ax^2 + B_2 x + C_3)(x-a) = 0$, così si dice che l'equazione $Ax^4 \ldots + E = 0$ ha due volte la radice a, od in altri termini, ch'essa ha una radice doppia eguale alla a. Similmente se a renda nello stesso tempo $E_4 = 0$, $D_4 = 0$, $C_4 = 0$ si dice che l'equazione proposta ha la radice tripla a. Nel contare il numero delle radici di un'equazione ogni radice doppia si conta per due, ogni radice tripla per tre, ecc.

19. Dall'equazione identica

$$Ax^4 \ldots + E = A(x-a)^4 + B_4(x-a)^3 + C_4(x-a)^2 + D_4(x-a) + E_4$$

si desume che il valore del polinomio $Ax^4 \ldots + E$ quando $x = a$ (valore che è $= E_4$) ed il valore che esso prende per un altro valore di x hanno una differenza che col diminuire di $(x-a)$ può ridursi quanto piccola si voglia; ossia con altre parole se il valore di x cangia per gradi infinitesimi, lo stesso avviene pel valore del polinomio $Ax^4 \ldots + E$, valore che non può mai divenire infinito finchè x è finito; perciò se per due valori della x quali sono $x = a$, $x = a + b$ i corrispondenti valori del polinomio sieno l'uno positivo l'altro negativo, bisognerà che il valore di quel polinomio si annulli almeno per un valore della x compreso tra a ed $a + b$. Dunque: «se i due valori che prende il primo membro dell'equazione $Ax^4 \ldots + E = 0$ per $x = a$ e per $x = a + b$ hanno segni opposti, l'equazione ha almeno una radice compresa tra a ed $a + b$». In particolare «se i valori E, E_4 del primo membro dell'equazione corrispondenti ad $x = 0$ ed a $x = a$ hanno segni opposti, l'equazione ha almeno una radice compresa tra 0 ed a».

20. L'equazione identica del precedente § mutandosi x in $y+a$ diventa

$$A(y+a)^4+B(y+a)^3+C(y+a)^2+D(y+a)+E=A\,y^4+B_4\,y^3+C_4\,y^2+D_4\,y+E_4.$$

Sviluppando le varie potenze del binomio $(y+a)$ i due membri deggiono risultare identici, perciò si ha

$$\begin{aligned}
E_4 &= A\,a^4+B\,a^3+C\,a^2+D\,a+E\\
D_4 &= 4\,A\,a^3+3\,B\,a^2+2\,C\,a+D\\
C_4 &= 6\,A\,a^2+3\,B\,a+C\\
B_4 &= 4\,A\,a\ \ +B
\end{aligned}$$

formule che fanno conoscere in qual modo i coefficienti della trasformata dipendano dal valore di a. Risulta dall'egual natura di queste formule che non solamente E_4, ma anche gli altri coefficienti D_4, C_4 ecc. procedono per gradi infinitesimi quando a va cangiando per gradi infinitesimi, e che se un certo valore di a rende D_4 di segno opposto a quello di D, vi sarà almeno un valore di a compreso fra il precedente e zero, il quale renderà $D_4=0$: lo stesso dicasi per C_4 ecc. Per istudiare l'andamento dei coefficienti dal polinomio proposto ad un trasformato possiamo supporre che sieno calcolati tutti i polinomii intermedii, nei quali un qualche coefficiente si annulla; vale a dire supporremo che colla cifra positiva a sieno calcolati i coefficienti del polinomio in $(x-a)$, poscia colla cifra positiva b sieno dedotti da questi quelli del polinomio in $(x-a-b)$ e così in seguito, fino al polinomio in $(x-a-b\,....-h)$ in guisa che tutti i numeri minori di $a+b\,....+h$ che fanno svanire qualche termine sieno alcuni dei a, $a+b$, ..., $a+b+....+h$. — Si noti che queste cifre positive a, b, ..., h possono essere indifferentemente intere o frazionarie, giacchè ora non si tratta di effettivamente calcolare i polinomii, ma soltanto di supporli calcolati.

21. In una serie qualunque di quantità, per esempio $A\ B\ C\ D\ E$, si dice *variazione* di segno il cangiamento di segno da un termine al successivo; così per esempio si dice che la serie $+2-5+4-1$ ha tre *variazioni* di segno, che la serie $-5+7-10$ ne ha due, e che la $-2-1-5$ non ne ha alcuna. Se qualche termine è nullo,

esso non si considera, oppure (il che torna lo stesso) gli si attribuisce tal segno da rendere minimo il numero delle variazioni; così la serie

$$+1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad +3 \quad 0 \quad +2$$

ossia la

$$+1 \quad -2 \quad -0 \quad -0 \quad +3 \quad +0 \quad +2$$

ha due variazioni di segno. — Consideriamo le seguenti serie di numeri tolte dalla tabella del § 16.

$$\begin{array}{ccccc}
A & B & C & D & E \\
A & B_1 & C & D & E \\
A & B_1 & C_2 & D & E \\
A & B_1 & C_2 & D_3 & E \\
A & B_1 & C_2 & D_3 & E_4 \\
A & B_2 & C_2 & D_3 & E_4 \\
A & B_2 & C_3 & D_3 & E_4 \\
A & B_2 & C_3 & D_4 & E_4 \\
A & B_3 & C_3 & D_4 & E_4 \\
A & B_3 & C_4 & D_4 & E_4 \\
A & B_4 & C_4 & D_4 & E_4
\end{array}$$

dove da una serie all'altra è sempre cangiato un solo termine nell'ordine con cui essi si calcolano; e ritenuto che a sia positiva, cerchiamo quali cangiamenti nel numero delle variazioni di segno possano avvenire da una serie all'altra. Osserveremo intanto che da una serie alla successiva vi potrà essere diminuzione nel numero delle variazioni, non mai aumento, poichè se per esempio dalla serie

$$A \quad B_2 \quad C_2 \quad D_3 \quad E_4$$

alla

$$A \quad B_2 \quad C_3 \quad D_3 \quad E_4$$

vi sia cangiamento di segno da C_2 a $C_3 = a\,B_2 + C_2$, questo C_3 sarà necessariamente dello stesso segno di B_2, e perciò vi sarà la perdita di una variazione da $B_2\ C_2$ a $B_2\ C_3$; d'altronde da $C_2\ D_3$ a $C_3\ D_3$ vi potrà essere o perdita o acquisto di una variazione; così dalla prima serie alla seconda vi sarà la perdita di due variazioni nel caso che B_2 e D_3 abbiano lo stesso segno, e non vi sarà nè perdita nè au-

mento se B_2 D_3 abbiano segni opposti. — Nel caso di $E_4 = 0$ dalla serie

$$A \quad B_1 \quad C_2 \quad D_3 \quad E$$

alla successiva

$$A \quad B_1 \quad C_2 \quad D_3 \quad 0$$

vi sarà la perdita di una variazione, poichè essendo $E_4 = a\,D_3 + E = 0$ è necessario che D_3 E abbiano segni opposti: che se lo stesso valore della cifra a renda $E_4 = 0$ e $D_4 = 0$ vi sarà la perdita di un'altra variazione dalla serie

$$A \quad B_2 \quad C_3 \quad D_3 \quad 0$$

alla successiva

$$A \quad B_2 \quad C_3 \quad 0 \quad 0\,;$$

ed una terza variazione si perderà nel caso che sia anche $C_4 = 0$, e così di seguito; noi abbiamo già detto (§ 18) che in tali casi a è una radice semplice, doppia, tripla ecc. dell'equazione $A\,x^4 \ldots + E = 0$. Che se il valore di a faccia svanire uno dei coefficienti intermedii B_4 C_4 D_4 del polinomio trasformato in $(x - a)$, dopo del qual coefficiente ve ne sia almeno uno che non si annulli; come, in via d'esempio, se sia $C_4 = 0$, e D_4 non sia zero, dalla serie

$$A \quad B_3 \quad C_3 \quad D_4 \quad E_4$$

alla successiva

$$A \quad B_3 \quad 0 \quad D_4 \quad E_4$$

o non vi sarà alcun cangiamento nel numero delle variazioni. o vi sarà la perdita di due variazioni, secondo che B_3 D_4 avranno segni opposti o segni uguali. La ragione di ciò è quella stessa data di sopra, poichè, essendo $C_4 = a\,B_3 + C_3 = 0$, i termini B_3 C_3 presentano una variazione, mentre C_3 D_4 possono avere segni uguali o presentare un'altra variazione; nel primo caso la variazione B_3 C_3 si conserva in B_3 0 D_4, nel secondo caso si perdono tutte due le variazioni. Quel valore di a che annulla un termine della trasformata in $(x - a)$ compreso fra due termini di segni uguali, e che perciò fa sparire due variazioni, dicesi un *valor critico* della proposta equazione $A\,x^4 \ldots + E = 0$. — Che se lo stesso valore a faccia sparire due termini contigui per esempio C_4 D_4 i quali sieno seguiti da uno E_4

che non si annulli vedremo che vi sarà la perdita di due variazioni o dalla serie

$$A \quad B_2 \quad C_3 \quad D_3 \quad E_4$$

alla successiva

$$A \quad B_2 \quad C_3 \quad 0 \quad E_4$$

o dalla

$$A \quad B_3 \quad C_3 \quad 0 \quad E_4$$

alla

$$A \quad B_3 \quad 0 \quad 0 \quad E_4 .$$

Anche in questo caso a si dice un valor critico dell'equazione. — E se a annulli nello stesso tempo tre termini contigui per esempio B_4 C_4 D_4, oppure due termini non contigui per esempio B_4 e D_4, vi potrà essere la perdita di quattro variazioni; ma sempre le perdite di variazioni non provenienti dalle radici saranno di numero pari. Se a produca la perdita di due paia di variazioni, lo si dirà un valor critico doppio e lo si conterà per due valori critici, ecc. — Si noti che se un valore di a annulli per esempio E_4 e non D_4, ma annulli anche C_4, e B_4 D_4 abbiano segni uguali, in guisa che svaniscano tre variazioni, esso sarà nello stesso tempo radice e valor critico. — È facile intendere che se è nullo alcuno dei coefficienti B C D E del polinomio primitivo, così per esempio se $C=0$ ed $E=0$, non vi è alcun cangiamento nel numero delle variazioni nè dalla serie

$$A \quad B_1 \quad 0 \quad D \quad 0$$

alla successiva

$$A \quad B_1 \quad C_2 \quad D \quad 0 ,$$

nè dalla serie

$$A \quad B_1 \quad C_2 \quad D_3 \quad 0$$

alla

$$A \quad B_1 \quad C_2 \quad D_3 \quad E_4 .$$

poichè

$$C_2 = a\,B, \quad E_4 = a\,D_3 .$$

22. Quanto noi abbiamo argomentato intorno alla supposta tabella calcolata colla cifra a potrà ripetersi per tutte le successive tabelle calcolate colle cifre $b, c, \ldots . h$, mantenendo la supposizione fatta nel

§ 20, che tutte le radici e tutti i valori critici maggiori di zero e non maggiori di $a+b+c \ldots + h$ sieno alcuni dei numeri a, $a+b$, $a+b+c$, ecc., sicchè nessun valor critico e nessuna radice cada tra zero ed a, tra a ed $a+b$ ecc.; ed osservando che si giunge allo stesso polinomio in $(x-k)$ essendo $k=a+b \ldots + h$ sia che si adoperi immediatamente la cifra k oppure successivamente le cifre a, b, ... h ne trarremo l'importantissima conclusione che «il numero delle variazioni di segno perdute dall'equazione in x ad una sua qualsivoglia trasformata in $(x-k)$ è uguale al numero delle radici dell'equazione proposta che sono maggiori di zero, e non maggiori di k, più il doppio del numero dei valori critici compresi in quello stesso intervallo».

23. Potendosi prendere la k tanto grande che tutti i termini della trasformata in $(x-k)$ sieno dello stesso segno, risulta come corollario del precedente teorema del Fourier quello del Cartesio: «il numero delle radici positive di un'equazione è tutto al più eguale a quello delle sue variazioni di segno, e la differenza fra questi due numeri è sempre pari»; essendo eguale al doppio del numero dei valori critici positivi.

24. Dopo che mediante una cifra positiva qualunque a si saranno trovati i coefficienti A B_4 C_4 D_4 E_4 della trasformata in $(x-a)$ se E ed E_4 abbiano segni opposti, il teorema del § 19 c'insegnerà che per certo nell'intervallo fra 0 ed a esiste almeno una radice, al cui valore noi ci avvicineremo mediante il solito calcolo con cifre minori di a. Che se per lo contrario la serie A, B_4 .... E_4 abbia tante variazioni di segno quante ne aveva la A B C D E, il teorema del Fourier (§ 22) ci renderà sicuri che nell'intervallo tra zero ed a non esiste alcuna radice, e quindi c'indurrà a procedere alle trasformate in $(x-a-b)$, $(x-a-b-c)$, ecc. finchè sparisca almeno una variazione di segno. — Rimane una sola difficoltà: se tra l'equazione in x e la trasformata in $(x-a)$ vi sia la perdita di un numero pari di variazioni, come faremo a separare le radici che forse esistono in quell'intervallo, o come potremo renderci sicuri che nessuna radice sia compresa tra zero ed a, e che quella perdita di variazioni dipenda

dall'esistenza di uno o più valori critici? — Le seguenti considerazioni valgono a togliere pienamente questa difficoltà.

25. Se a è una radice della proposta equazione $Ax^4 + Bx^3 .... + E = 0$ si ha (§ 16)

$$A x^4 + B x^3 .... + E = (A x^3 + B_1 x^2 + C_2 x + D_3)(x - a),$$

e se inoltre l'equazione proposta abbia un'altra radice b si avrà pure (§ 17) l'equazione identica $A x^3 + B_1 x^2 + C_2 x + D_3 = (A x^2 + B' x + C')(x - b)$; e se finalmente nessun'altra radice della proposta sia compresa tra a e b bisognerà che $A a^2 + B' a + C'$, $A b^2 + B' b + C'$ abbiano segni uguali, altrimenti (§ 19) la $A x^2 + B' x + C' = 0$, e perciò anche la $A x^4 + ... + E = (A x^2 + B' x + C')(x - b)(x - a) = 0$, avrebbero una radice compresa tra a e b, il che è contro l'ipotesi. Ora se operando colla cifra a e mediante la solita tabella si calcoli il trasformato in $(x - a)$ del polinomio $A x^4 .... + E$, che è identicamente eguale a $(A x^2 + B' x + C')(x - b)(x - a)$, si vedrà per le (3) e (4) del § 16 che il polinomio trasformato avrà l'ultimo termine $E_4 = 0$ ed il penultimo $D_4 = A a^3 + B_1 a^2 + C_2 a + D = (A a^2 + B' a + C')(a - b)$; per la medesima ragione il polinomio trasformato in $(x - b)$ avrà l'ultimo termine nullo ed il penultimo $= (A b^2 + B' b + C')(b - a)$, e per quel che si disse di sopra questi due penultimi termini avranno segni opposti; quindi pel § 20 vedremo che « se una data equazione abbia le due radici a b tra le quali non sia compresa alcun'altra radice, le equazioni trasformate in $(x - a)$ ed in $(x - b)$ avranno i penultimi termini di segni opposti, e perciò vi sarà un'equazione trasformata in $(x - \alpha)$ essendo α un numero intermedio tra a e b, la quale avrà il penultimo termine nullo ». — I valori che annullano il penultimo termine sono (veggansi le equazioni del § 20) le radici dell'equazione $4 A x^3 + 3 B x^2 + 2 C x + D = 0$, che dagli analisti è detta la *derivata* della proposta $A x^3 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0$; così si ha il teorema del Rolle: « Se α, β, γ .... δ sieno le radici dell'equazione *derivata* distribuite in ordine di grandezza, l'equazione proposta avrà tutto al più una sola radice minore di α, una sola compresa tra α e β, una sola tra β e γ, ..., ed una sola maggiore di δ''; perciò noi saremo certi di separare ad una ad una tutte le radici della pro-

posta equazione se ne calcoleremo le trasformate in $(x-\alpha)$, in $(x-\beta)$, ..., in $(x-\delta)$.

26. Prendasi per esempio l'equazione

$$3x^4-68x^3+522x^2-1620x+2100=0.$$

Siccome i coefficienti $3+52+282+420+100$ della trasformata in $(x-10)$ non presentano alcuna variazione di segno mentre la proposta ne ha quattro, così tutte le radici e tutti i valori critici sono compresi tra 0 e 10: resta da decidere se vi sieno quattro radici, o due radici ed un valor critico, o due valori critici. Ora l'equazione derivata $12x^3-204x^2+1044x-1620=0$ ha le tre radici 3, 5, 9; calcolando dunque le trasformate in $(x-3)$, in $(x-5)$, $(x-9)$, noi siamo certi di separare tutte le radici della proposta (ciò fu fatto operando successivamente colle cifre 3, 2, 4, e si vede qui sotto).

$$\begin{array}{r|l}
 & 3-68+522-1620+2100 \\
\hline
10 & 3-38+142-\ \ 200+\ \ 100 \\
 & 3-\ \ 8+\ \ 62+\ \ 420 \\
 & 3+22+282 \\
 & 3+52
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 3-68+522-1620+2100 \\
\hline
3 & 3-59+345-\ \ 585+\ \ 345 \\
 & 3-50+195+\ \ \ \ 0 \\
 & 3-41+\ \ 72 \\
 & 3-32 \\
\hline
2 & 3-26+\ \ 20+\ \ \ \ 40+\ \ 425 \\
 & 3-20-\ \ 20-\ \ \ \ 0 \\
 & 3-14-\ \ 48 \\
 & 3-\ \ 8 \\
\hline
4 & 3+\ \ 4-\ \ 32-\ \ 128-\ \ \ \ 87 \\
 & 3+16+\ \ 32+\ \ \ \ 0 \\
 & 3+28+144 \\
 & 3+40
\end{array}$$

Le trasformate in $(x-9)$ ed in $(x-10)$ hanno gli ultimi termini -87, $+100$ di segni opposti, perciò (§ 19) una radice della proposta equazione è compresa tra 9 e 10, e non ve ne può essere che una, poichè se ve ne fossero due, tra mezzo ad esse cadrebbe (§ 25) una radice dell'equazione derivata, (d'altronde l'esistenza di una sola radice è provata (§ 22) dalla perdita di una sola variazione dalla trasformata in

$(x-9)$ a quella in $(x-10)$). Rimane il dubbio se da zero a 9 vi sia una sola, oppure tre radici; ora se osserviamo la trasformata in $(x-5)$ vediamo che il suo ultimo termine $+545$ ha lo stesso segno dell'ultimo termine $+2100$ della proposta, perciò tra zero e 5 non può (§ 19) cadere una sola radice, e pel teorema del Rolle (§ 25) non ve ne può cadere più di una; così pure manca ogni radice tra 5 e 8, e le due variazioni perdute dall'equazione in x a quella in $(x-8)$ dipendono da un valor critico, il quale (nel nostro caso particolare) è appunto il 5 che annulla un termine compreso fra due $+72$ $+545$ di egual segno.

27. Si osservi che per trovare le radici dell'equazione derivata, od almeno per avvicinarsi indefinitamente alle medesime, non è già necessario trattare separatamente tale equazione, poichè calcolando le tabelle che si riferiscono all'equazione proposta è facile scegliere le cifre in guisa di far annullare od almeno render sempre più piccolo il penultimo termine anzichè l'ultimo, e varranno anche per tal caso conclusioni analoghe a quelle stabilite nei §§ 21, 22. — Nel precedente esempio l'equazione proposta presenta, quando si eccettua l'ultimo termine, tre variazioni; e la trasformata in $(x-10)$, pure eccettuando l'ultimo termine, non ne presenta alcuna; dunque l'equazione derivata ha tre radici, oppure una radice ed un valor critico tra zero e 10, vale a dire siamo certi che tra zero e 10 vi è uno oppur tre valori che fanno annullare il penultimo termine: calcoliamo adunque i coefficienti di una trasformata intermedia, per esempio di quella in $(x-6)$; essi sono $5+4-54-108+572$, dove, eccettuando l'ultimo termine, si ha una sola variazione, e perciò l'equazione derivata ha una radice compresa tra 6 e 10. Resta da sapere se tra zero e 6 ne abbia due o nessuna, il che facilmente si riconoscerà mediante qualche trasformata intermedia.

28. Vedremo che in pratica non occorre mai di fare tutte queste considerazioni; ciò nondimeno, acciocchè il metodo non lasci assolutamente alcuna incertezza, dobbiamo notare che se un numero pari di radici dell'equazione derivata, ossia di valori che annullano il penultimo termine, sieno talmente vicini che non si lascino facilmente separare; per

esser certi di separarli, o di riconoscere che non esistono, bisognerà calcolare le trasformate corrispondenti ai valori che fanno annullare i penultimi termini, i quali sono le radici dell'equazione *derivata seconda* (§ 20) $6Ax^2+3Bx+C=0$, e così di seguito; giacchè tutto quanto si disse tra l'ultimo e il penultimo termine può ripetersi tra il penultimo e l'antipenultimo, ecc. In tal modo saremo condotti a cercare il valore che annulla il secondo termine. il quale separerà i due valori, se esistono, che annullano il terzo termine, e con questi saremo certi di separare i valori che annullano il quarto termine, e così in seguito fino all'ultimo.

(0)	3	— 68	+ 522	— 1620	+ 2100
(3)	3	— 32	+ 72	+ 0	+ 345
(4)	3	— 20	— 6	+ 60	+ 388
(5)	3	— 8	— 48	— 0	+ 425
(6)	3	+ 4	— 54	— 108	+ 372
(7)	3	+ 16	— 24	— 192	+ 217
(9)	3	+ 40	+ 144	+ 0	— 87
(10)	3	+ 52	+ 282	+ 420	+ 100

Nel precedente esempio il valore che annulla il secondo termine è (come vedremo al § 45)

$$a=\frac{68}{4\times3},$$

ma anche prendendo il valore approssimato $a=6$ si ha la trasformata in $(x-6)$, la quale separa i due valori che annullano il terzo termine che sono all'incirca 4 e 7, i quali separano i tre valori 3, 5, 9 che annullano il quarto termine. Il terzo di questi valori separa i due valori che annullano l'ultimo termine, ed i due 3, 5 separerebbero gli altri due valori se esistessero, ed invece colla costanza di segno dell'ultimo termine mostrano che la proposta equazione non ha altre radici oltre quelle due, una compresa fra 5 e 9, l'altra maggiore di 9.

29. Coi calcoli precedenti si verranno a determinare anche tutti i valori critici della proposta equazione, poichè essi sono quei valori che fanno annullare qualche termine compreso tra due di egual segno: che se importasse determinare con molta approssimazione i va-

lori critici, sarebbe più comodo risolvere separatamente le varie equazioni derivate (§ 20). — Se un valore a annulli nello stesso tempo parecchi termini della trasformata in $(x-a)$, esso potrà essere un valor critico doppio o triplo ecc.; per riconoscere quante variazioni spariscano dalla trasformata in $(x-a+\omega)$ alla trasformata in $(x-a-\omega)$, essendo ω una quantità estremamente piccola, si noti che dalla trasformata in $(x-a)$ a quella in $(x-a-\omega)$ il numero delle variazioni rimane (§ 21) lo stesso; così pure se mutiamo il segno all'incognita, sicchè si abbia l'equazione in $(-x+a)$, questa avrà tante variazioni quante l'equazione in $(-x+a-\omega)$, ma il numero di variazioni di questa (che non manca di alcun termine) è uguale al proprio grado meno il numero delle variazioni della trasformata in $(x-a+\omega)$; da tutto ciò risulta la regola che esprimiamo col seguente esempio. Data l'equazione $x^7-33x^3+84x^2+1=0$ essa ha *due* variazioni di segno, e perciò (§ 22) non può avere più di due radici positive, e la trasformata in $(-x)$ $-(-x)^7+33(-x)^3+84(-x)^2+1=0$ avendo *una* sola variazione mostra che la proposta non può avere più di una radice negativa; e la trasformata in $(x+\omega)$ avrà $7-1$ variazioni; perciò nel passaggio dall'equazione in $(x+\omega)$ e quella in (x) si perdono $7-1-2=4$ variazioni, e lo zero è un valor critico doppio. L'equazione trasformata in $(x-1)=z$ $z^7+7z^6+33z^4+70z+51=0$ non avendo variazioni di segno non può avere radici positive, e dalla considerazione della sua trasformata in $(-z)$ si vede che essa ne può avere tutto al più 3 di negative; e qui la differenza $7-0-3=2$ mostra che lo zero è un valor critico dell'equazione in z, e che perciò 1 lo è dell'equazione in (x), la quale per conseguenza non ammette che una sola radice negativa.

30. Le radici si separeranno quasi sempre senza bisogno di far annullare i varii termini precedenti al primo, e la mancanza di radici si riconoscerà, anche senza determinare i valori critici, coll'adoperare invece il criterio che or ora esporremo; del resto giova notare, che se due equazioni trasformate presentino per esempio i segni

$$+ - + + - +$$
$$+ + + - + +$$

per decidere se le due variazioni perdute dalla prima alla seconda dipendano da due radici o da un valor critico non sarebbe già necessario cercare la trasformata intermedia nella quale svanisce il secondo termine, poscia cercare quelle due (che forse esisteranno) nelle quali svanisce il terzo termine ecc. Infatti osserveremo che i cinque primi termini presentano nella prima equazione tre variazioni e nella seconda due, e siccome i ragionamenti del § 22 possono applicarsi anche al penultimo termine, così saremo certi che nell'intervallo di cui si tratta il penultimo termine non può svanire che una sola volta; e la relativa trasformata, secondo che avrà l'ultimo termine col segno — o col segno +, mostrerà l'esistenza di due radici o di un valor critico: se in tale trasformata si annullassero insieme i due ultimi termini, si avrebbe una radice doppia.

§ IV.

Criterio per riconoscere la mancanza di radici in un dato intervallo

31. Dopo che mediante le considerazioni dei §§ 25, 28 siamo fatti sicuri di poter in ogni caso particolare separare tutte le radici di una proposta equazione, vediamo come si possa dispensarsi in pratica dalle ricerche suaccennate mediante criterii che facciano conoscere la non esistenza delle radici, e quindi l'inutilità di cercarle. La questione che sarebbe da risolvere è la seguente: Data un' equazione di qualsiasi grado, che noi in via d'esempio esprimiamo colla $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ la quale non abbia alcuna radice compresa tra zero ed a, trovare un criterio, il quale ci assicuri di tale mancanza di radici. Il criterio assoluto e generale fu trovato dallo Sturm, e lo esporremo in appresso; ma siccome il suo impiego riesce in pratica non poco tedioso, così ora ci proponiamo di trovare qualche criterio più comodo, quantunque esso sia imperfetto in questo senso, che la equazione possa mancare di radici nell'intervallo da zero ad a, e nulladimeno il criterio non lo indichi, restando però sempre vero che se il criterio è sod-

disfatto l'equazione manca di radici. Nel primo caso l'imperfezione del criterio ci condurrà a calcolare qualche trasformata intermedia tra l'equazione in x e la trasformata in $(x-a)$, ed avendo così ristretto l'intervallo sarà più facile che il criterio sia applicabile, vale a dire che esso indichi la mancanza di radici; alla peggio noi andremo continuamente avvicinandosi ad un paio di radici o ad un valor critico. — Il criterio di cui parleremo non richiede la conoscenza della trasformata in $(x-a)$; del resto se questa fosse conosciuta e se o il suo ultimo termine avesse segno opposto a quello della proposta, oppure essa contenesse tante variazioni di segno quante ne ha la proposta, non si avrebbe occasione di adoperare il criterio, poichè nel primo caso noi sapremmo pel § 19 che da zero ad a vi è almeno una radice, e nel secondo noi saremmo al contrario sicuri (§ 22) che non ve ne può essere alcuna.

32. Nella maggior parte dei casi nei quali avremo da adoperare il criterio, la quantità a sarà eguale ad uno, ma se ciò non fosse sarà facile ridursi a tal caso; infatti posto $x=a\,y$ l'equazione diventerà $a^3 A\,y^3+a^2 B\,y^2+a\,C\,y+D=0$ e saremo ridotti a cercare se questa abbia radici da $y=0$ ad $y=1$. Questo cangiamento dei coefficienti vale qualunque sia a positiva o negativa, così in particolare se sia data la trasformata in $x-1=x'$ $A\,x'^3+B_3\,x'^2+C_3\,x'+D_3=0$ e si voglia cercare se vi sieno radici da $x=0$ ad $x=1$, cioè da $x'=0$ ad $x'=-1$, porremo $x'=-y$ e saremo ridotti a cercare se l'equazione $-A\,y^3+B_3\,y^2-C_3\,y+D_3=0$ abbia radici da $y=0$ ad $y=1$.

33. Noi saremo certi che un'equazione non ha radici da $x=0$ ad $x=1$ se potremo riconoscere che in tutto questo intervallo il valore del suo primo membro conserva sempre lo stesso segno e mai non si annulla. Quando $x=0$ il primo membro si riduce all'ultimo termine, che per fissare le idee supporremo positivo. Ora se il primo membro dell'equazione sia la somma di alquanti binomii o trinomii, ognuno dei quali non divenga mai negativo finchè x è compreso tra zero ed uno, ed inoltre almeno uno di essi non si annulli in tale intervallo, è palese che il primo membro conserverà sempre un valore positivo. — Segnando con P, N, M, L, K delle quantità positive, dico

che da $x=0$ ad $x=1$ non diviene mai negativo nè il binomio $-Px+P$, nè il trinomio $(M-N)x^2-Mx+N$, purchè $M<$ od $=2N$, nè il trinomio Hx^2-Kx+L purchè $H>K^2:4L$. Pel binomio la cosa è per sè evidente. Pel primo trinomio calcoliamone nel solito

$$\begin{array}{r|l} & (M-N)- \quad M \qquad +N \\ \hline 1 & (M-N)- \quad N \qquad -0 \\ & (M-N)-(2N-M) \\ & (M-N) \end{array}$$

modo il trasformato in $(x-1)$, e si vedrà che l'equazione $(M-N)x^2-Mx+N=0$ ha la radice $x=1$, la quale è doppia se $M=2N$, e se $M<2N$ l'equazione ha una radice maggiore di 1, giacchè il polinomio $(M-N)(x-1)^2-(2N-M)(x-1)-0$ ha una variazione di segno, dal che risulta che il primo membro dell'equazione si conserva positivo da $x=0$ ad $x=1$. — L'altro trinomio Hx^2-Kx+L

$$\begin{array}{c|l} & H-K+L \\ \hline \frac{K}{2H} & H-\frac{K}{2}+\left(L-\frac{K^2}{4H}\right) \\ & H+0 \\ & H \end{array}$$

adoperando la cifra $K:2H$ si trasforma nell'altro

$$H\left(x-\frac{K}{2H}\right)^2+\left(L-\frac{K^2}{4H}\right).$$

il quale quando $H>K^2:4L$ presenta un valor critico dell'equazione $Hx^2-Kx+L=0$, perciò questa non ha radici ed il suo primo membro si conserva positivo qualunque sia il valore di x: che se fosse $H=K^2:4L$ sarebbe $Hx^2-Kx+L=H(x-K:2H)^2$ quantità che non diviene mai negativa e che si annulla nel solo caso di $x=K:2H$. — Concludiamo adunque che se Q, P, N, M, L, K, H, sieno quantità positive, e sia M eguale o minore di $2N$, e H eguale o maggiore di $K^2:4L$, la somma di quante si vogliano formule

$$Q,\quad -Px+P,\quad (M-N)x^2-Mx+N,\quad Hx^2-Kx+L$$

moltiplicate per quali si vogliano potenze della x si manterrà sempre positiva nell'intervallo da $x=0$ ad $x=1$.

34. Dalle precedenti conclusioni si deduce il seguente criterio: Quando si dubiti se una data equazione di qualunque grado, per esempio $Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F=0$, abbia radici comprese fra zero ed uno, si eseguisca sopra i coefficienti dell'equazione il seguente calcolo, il quale si terrà facilmente a memoria notando la sua analogia colle relazioni che hanno luogo nelle solite tabelle. Si avverta però che i numeri della seconda riga si dovranno ora calcolare procedendo da destra verso sinistra, anzichè secondo il solito da sinistra a destra. Si scrivano in una riga tutti i coefficienti della proposta equazione, ponendo degli zeri in luogo dei termini che mancassero

$$\begin{array}{r|llllll} & & +A & +B & +C & +D & +E+F \\ \hline 1 & Z & +A_0 & +B_1 & +C_2 & +D_3 & -F \quad 0 \end{array}$$

nella seconda riga si scriva cominciando a destra lo zero; — poscia $-F$, che sommato con F darebbe lo zero già scritto; — poscia tal quantità $+D_3$ che sommata con E dia $-F$; — poscia tal quantità $+C_2$ che sommata con $+D$ dia $+D_3$, e così in seguito, finendo col termine Z antecedente al primo A: vale a dire sia

$$D_3=-E-F,\quad C_2=-D+D_3,\quad B_1=-C+C_2,\quad A_0=-B+B_1,\quad Z=-A+A_0:$$

se tutte le quantità Z, $+A_0$, ..., $-F$ della seconda riga abbiano egual segno noi saremo certi che la proposta equazione non ha alcuna radice da $x=0$ ad $x=1$. Dicendo di egual segno non si esclude il caso che qualche quantità sia nulla; se lo fosse il primo termine Z l'equazione avrebbe precisamente la radice $x=1$. — Nel caso che uno dei numeri $+D_3$, $+C_2$ ecc. riuscisse di segno opposto a F, ma peraltro esso fosse minore (fatta astrazione dal segno) di quello già scritto e che gli sta a destra, si scriverebbe nulladimeno anche questo numero e si proseguirebbe il calcolo nel modo già detto: e se fra i numeri $Z+A_0+B_1+....-F$ ve ne fosse uno di segno opposto agli altri, ma esso però fosse preceduto e seguito da due termini dello stesso segno di $-F$, dei quali il secondo (cioè quello a destra) fosse maggiore di quello che ha segno opposto agli altri; noi ancora saremo sicuri che la proposta equazione non ha alcuna radice da $x=0$ ad $x=1$. E si noti che il caso ora indicato potrà ripetersi più volte;

così per esempio A_0 e C_2 potrebbero avere segni opposti ai Z. B_1 D_3 $-F$, e purchè il valore di A_0 fosse minore di quello di B_1 ed il valore di C_2 minore di D_3, sussisterebbe ancora la conclusione del criterio. — Nel caso poi che uno dei numeri $+D_3$ $+C_2$ ecc. per esempio $C_2=-D+D_3$ riuscisse di segno opposto a $-F$, ed inoltre questo C_2 avesse valore maggiore di D_3 non si dovrebbe scrivere questo $C_2=-D+D_3$, ma invece sostituirvi un numero C_2 almeno uguale a $-D^2:4D_3$; e se il seguente numero $+B=-C+C_2$ risulti dello stesso segno di $-F$, e lo stesso sia degli altri $+A_0$, Z sussisterà ancora la conclusione del criterio. — Che se per lo contrario facendo i calcoli sopra indicati si trovassero due termini successivi di segno opposto a $-F$, oppure Z di segno opposto allo stesso $-F$, non si potrebbe ricavarne alcuna conclusione; perchè, o l'equazione proposta avrebbe realmente delle radici nell'intervallo da **0** ad **1**, od il dato criterio sarebbe insufficiente a mostrare la loro mancanza.

55. Serva di primo esempio l'equazione

$$x^4-6x^3+3x^2-2x+5=0\,.$$

Fatti sui coefficienti i calcoli già spiegati, cioè scritti nella seconda riga

$$\begin{array}{r|l} & 1-6+3-2+5 \\ \hline 1 & -1-0-6-3-5\quad 0 \end{array}$$

i numeri **0**, $-\mathbf{5}$, $+\mathbf{2}-\mathbf{5}=-\mathbf{3}$, $-\mathbf{3}-\mathbf{3}=-\mathbf{6}$, $\mathbf{6}-\mathbf{6}=\mathbf{0}$, $-\mathbf{1}-\mathbf{0}=-\mathbf{1}$, siccome essi sono tutti dello stesso segno, così ne dedurremo che l'equazione non ha alcuna radice da zero ad uno. — Osservando d'altronde che nella trasformata in $(x-1)$ spariscono due

$$\begin{array}{r|l} & 1-6+3-2+5 \\ \hline 1 & 1-5-2-4+1 \\ & \ldots\ldots \end{array}$$

variazioni (delle quattro che presenta la proposta), ne dedurremo che nell'intervallo da zero ad uno esiste un valor critico.

56. Abbiasi per secondo esempio l'equazione

$$x^7-2x^6+4x^5-2x^4-28x^2+18x-3=0\,.$$

Nella seconda riga dopo avere scritto lo zero ed il $+3$ si dovrebbe

scrivere secondo la prima regola $-18+5=-15$, ma siccome questo -15 è di segno opposto al $+5$, e 15 ha un valor maggiore del seguente 5, così bisogna invece scrivere $-27=-18.18:4.5$;

$$\begin{array}{r|l} & 1-2+4-2-0-28+18-3 \\ \hline 1 & 0+1-1+3+1+1-27+\ \ 3\quad 0 \end{array}$$

poscia progredendo al solito si scriveranno i numeri $+1$, $+1$, $+5$, e si scriverà anche $-1=-4+3$ quantunque esso abbia segno opposto agli altri, perchè ha un valore minore del 3 che lo segue a destra; finalmente si scriverà $1=2-1$, e $0=1-1$. E scorgendo che tutti i numeri della seconda riga hanno segni uguali, tranne i due -1 e -27 che sono preceduti e seguiti da termini di segno opposto, se ne dedurrà che la proposta non ammette radici da zero ad uno. A motivo del primo termine della seconda riga, che è zero anzichè positivo, potrebbe rimanere il dubbio che l'equazione avesse precisamente la radice $x=1$; ma è facile vedere che il dubbio è insussistente.

37. Sia per ultimo esempio proposta l'equazione

$$x^4+6x^3+14x^2-20x+7=0.$$

Nella seconda riga si scriverà il -7, e poscia non si scriverà il $20-7=13$ perchè esso riuscirebbe di segno opposto e maggiore

$$\begin{array}{l} \quad\ 1+6+14-20+7 \\ \hline \ldots.\ +1+15-\ \ 7\quad 0 \end{array}$$

del 7 già scritto; vi si sostituirà adunque $15>20.20:4.7$; poscia si ha $-14+15=1$, ma siccome in tal maniera il termine $+15$ di segno opposto al -7 non è preceduto da un altro di segno opposto, così niuna conclusione possiamo trarre dal fatto calcolo, e rimane dubbioso se l'equazione abbia delle radici comprese tra zero ed uno, oppure se tali radici non esistano, ma il criterio sia insufficiente ad indicarne la mancanza.

38. Per rimaner persuasi della verità dell'esposto criterio basterà notare che i polinomii dei dati esempii si decompongono in parti, ognuna delle quali si mantiene (§ 33) positiva nell'intervallo da $x=0$ ad $x=1$.

Così il polinomio

$$x^4 - 6\,x^3 + 3\,x^2 - 2\,x\;\; + 5$$

è formato dall'unione di

$$\left\{\begin{array}{r} -5\,x\;\; + 5 \\ (-3\;\; x\;\; + 3)\,x \qquad\quad \\ (-6\,x\;\; + 6)\,x^2 \qquad\qquad\qquad \\ (-x\;\; + 1)\,x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ + x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array}\right\}$$

ed il polinomio

$$-(x^7 - 2\,x^6 + 4\,x^5 - 2\,x^4 \qquad - 28\;\; x^2 + 18\,x - 3)$$

è formato dall'unione di

$$\left\{\begin{array}{r} + 27\;\; x^2 - 18\,x + 3 \\ (-x\; + \;\;1)\,x^2 \qquad\qquad \\ (-x + 1)\,x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ (x^2 - 4\,x + 3)\,x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ (-x + 1)\,x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array}\right\}$$

In quanto al polinomio $x^4 + 6\,x^3 + 14\;x^2 - 20\,x + 7$ del § 37 la sua parte $15\;x^2 - 20\,x + 7$ rimane sempre positiva da $x = 0$ ad $x = 1$. ma lo stesso non può dirsi della parte $(x^2 + 6\,x\; - \;1)\,x^2$.

§ V.

Risoluzione delle equazioni

39. Prima di passare ad alcuni esempii, riassumiamo i principii che guidano alla compiuta risoluzione di ogni equazione algebraica. Un facile calcolo ci dà (§§ 1, 2) il modo di ottenere quante si vogliano trasformate in $(x - a)$, $(x - b)$ ecc. di una data equazione in x; poscia pel teorema del Fourier (§ 22) basta numerare le variazioni di segno che presentano queste trasformate per conoscere in quali intervalli non vi sieno nè radici nè valori critici, ed in quali sieno comprese le radici od i valori critici. Questi ultimi intervalli si suddivi-

dano mediante trasformate intermedie, e così si vada indefinitamente avvicinandosi a ciascuna singola *radice*, vale a dire a ciascun valore che annullando l'ultimo termine fa sparire una variazione; ed a ciascun *valore critico*, vale a dire a ciascun valore che annullando un termine compreso fra due di segni uguali, fa sparire due variazioni; l'esame del modo con cui si formano le tabelle, mediante le quali si trovano le trasformate, faciliterà la scelta delle successive cifre per giungere più speditamente allo scopo. D'altra parte pel teorema del Rolle (§§ 25, 28) il termine, per esempio, quarto non potrebbe in un certo intervallo annullarsi due volte senza che un valor intermedio non annullasse il termine terzo; perciò trovata la trasformata che ha il terzo termine nullo, si vedrà se veramente il quarto termine si annulla nel dato intervallo due volte o nessuna. Inoltre il teorema del Fourier applicato ad un certo numero dei primi termini delle trasformate (§ 30) farà conoscere alcuni intervalli, nei quali per certo non si annulla un dato termine delle equazioni, e così si risparmierà qualche ricerca inutile. — Che se si voglia trovare (come è il caso ordinario) le radici dell'equazione, e non si curino i valori critici, la ricerca sarà resa più spedita e più semplice, poichè tutte le successive tabelle saranno dirette a far annullare l'ultimo termine, ed il teorema del Fourier (§ 22) c'insegnerà in quali intervalli ciò sia impossibile. È vero che per qualche intervallo (quello in cui sia compreso qualche valor critico o qualche paio di radici) il teorema ci lascierà in dubbio se vi sia radice sì o no, ma applicando all'intero intervallo o ad alcuna delle sue suddivisioni il criterio esposto nel § IV. verremo quasi sempre a conoscere ben presto quali sieno quegli intervalli nei quali esistono valori critici anzichè radici; che se pure il criterio cada in difetto, noi non avremo fatto se non se un calcolo inutile, in quanto che esso ci condurrà ad un valor critico anzichè ad una radice: per lo che questi calcoli inutili non potrebbero in verun caso superare il numero dei valori critici, numero il cui doppio sommato col numero delle radici è uguale al grado dell'equazione.

40. Il caso estremo è quello di due radici uguali; allora è ben evidente che per quante intermedie sostituzioni si facciano le due ra-

dici non si potranno giammai separare. Il teorema del Fourier ci terrà sempre avvertiti in quale intervallo cadano due radici o un valor critico, ed il criterio del § 34 ci lascierà sempre in dubbio se esista questo o quelle; ma intanto il nostro calcolo guidato dal teorema del Rolle procederà direttamente alla determinazione del valor approssimato della radice doppia: sicchè in pratica non giova arrestarsi alla ricerca delle radici multiple (ricerca di cui parleremo in seguito) a meno che non si abbia qualche motivo per credere che realmente ne esistano. Può rimanere il sospetto, che quando si determina approssimatamente il valore della radice doppia si trascuri forse qualche piccola quantità, per lo che possa scambiarsi la radice doppia in valor critico o viceversa; si risponderà che l'indecisione dipende dalla natura stessa della questione, poichè non si tratta se non se di trovare un valor approssimato e spingere l'approssimazione quanto innanzi si voglia: se i coefficienti dell'equazione sieno espressi approssimatamente, potrà essere affatto indeciso se vi appartenga la radice doppia od il valor critico.

41. Non occorre stabilire alcuna regola per l'ordine nel quale si calcoleranno le successive trasformate di una data equazione, poichè tanto si potrà adoperare da prima una cifra molto grande come sarebbe 10, 100, 1000, ecc. per fare sparire tutte le variazioni e conoscere quindi dentro quali limiti sieno comprese tutte le radici positive della proposta; quanto cominciare colle cifre piccole e andare innanzi finchè siensi trovate tutte le radici. Ogni trasformata inserita in un intervallo in cui vi è qualche perdita di variazioni è utile, perchè o serve ad avvicinare i confini dentro i quali sono comprese le radici, o serve a separarle.

42. Mediante le cifre negative si potrebbero trovare le radici negative di una proposta equazione; se non che riuscirà più comodo ricondurre questa ricerca a quella delle radici positive mutando x in $-x$.

43. Piuttostochè adoperare delle *cifre decimali* riesce più facile moltiplicare (§ 9) i termini delle successive trasformate per quelli di una progressione decupla crescente, ed adoperare delle cifre sempre

intere; queste cifre debbono scegliersi (§ 12) in guisa da diminuire il più che sia possibile l'ultimo numero della prima riga di ciascuna tabella, senza che peraltro esso prenda segno opposto a quello dell'ultimo termine della trasformata di cui si tratta. Ponendo mente al modo con cui si forma ciascuna tabella (veggasi il § 16) sarà facile scorgere che se i coefficienti A, B, C, D, E sieno dal primo all'ultimo rapidamente crescenti, la cifra a, opportuna per annullare l'ultimo termine E_4, sarà all'incirca il quoziente di E diviso per $-D$; mentre invece se vorremo annullare il penultimo termine D_4 prenderemo per a all'incirca il quoziente di D diviso per $-2C$; e per annullare l'antipenultimo C_4, la cifra a sarà all'incirca il quoziente di C diviso per $-3B$; ecc.

44. Esempio I. Sia proposta l'equazione

$$x^3-15x^2+68x-83=0.$$

Per trovare la più piccola delle sue radici positive formiamo la prima tabella colla cifra 1, giacchè si vede a colpo d'occhio che la cifra 2 farebbe cangiare il segno dell'ultimo termine, e quindi rimarrebbe sorpassata una radice: in tal guisa si ottengono i coefficienti $1-12+41-29$ della trasformata in $(x-1)$. Passiamo adesso alla ricerca dei decimi e moltiplicando i predetti coefficienti per una progressione decupla otteniamo i coefficienti della trasformata in $10(x-1)=x'$;

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-15+68-83 \\
\hline
1 & 1-14+54-29 \\
 & 1-13+41 \\
 & 1-12 \\
\hline
 & 1-120+4100-29000 \\
\hline
8' & 1-112+3204-\;\;3368 \\
 & 1-104+2372 \\
 & 1-\;\;96
\end{array}$$

adopreremo la cifra 8', giacchè quantunque l'ultimo termine -29000 contenga appena 7 volte il penultimo 4100, pure si vede che questo è molto diminuito dal precedente -120, ed anzi dopo compiuta la tabella si scorge che la cifra fu troppo piccola, perchè l'ultimo termine 3368 comprende più di una volta il penultimo 2372, il quale

inoltre dee esser diminuito dall'antipenultimo — 96. Piuttosto di cancellare la seconda tabella e calcolarne un'altra colla cifra 9' potrà esser più comodo partire dai coefficienti ultimamente trovati, e calcolare una nuova tabella colla cifra 1', che ci darà i coefficienti della trasformata in $(x'-9)$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-96+2372-3368 \\
\hline
1' & 1-95+2277-1091 \\
 & 1-94+2183 \\
 & 1-93 \\
\hline
 & 0{,}01-9{,}3\ +2183\ -10910 \\
\hline
5'' & ,01-9{,}25+2136{,}7-\ 226 \\
 & \quad -9{,}20+2090{,}7 \\
 & \quad -9{,}15 \\
\hline
 & -0{,}09+\ 209{,}1-\ 226 \\
\hline
1''' & -0{,}09+\ 209\ -\ 17 \\
0^{\prime v} & \qquad\quad 20{,}9\ -\ 17 \\
8^{v} & \qquad\quad 2{,}1\quad 0
\end{array}
$$

Questi calcoli si continueranno fin che si ottenga tutta quella maggior approssimazione che si desideri: se vogliamo limitarci a calcolare la radice con quattro sole decimali, moltiplicheremo (§ 9) i coefficienti della trasformata in $(x'-9)$ per la progressione decupla 0,01 0,1 1 10; e colla cifra 5'', che risulta dalla divisione dell'ultimo termine pel penultimo, calcoleremo un'altra tabella, dalla quale passeremo alla successiva che si riduce ad una semplice divisione di 226 per 209 e ci dà il quoziente 108, e quindi la radice cercata $x=1{,}93108$, che è esatta anche nella quinta decimale (veggasi la Nota I).

45. Per procedere alla ricerca delle altre radici dell'equazione $x^3-15x^2+68x-83=0$ potremo prendere per cifra un'intera decina, e senza terminare la tabella

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-15+68-83 \\
\hline
10 & 1-\ 5+18+97 \\
 & 1+\ 5\ldots
\end{array}
$$

scorgeremo dalla perdita delle tre variazioni della proposta equazione che oltre la radice già trovata essa ha due radici, oppure un valor critico minore di 10. La cifra 6 ci mostrerà mediante la solita ta-

bella che siamo prossimi alla seconda radice, quindi passeremo alla cifra di decimi che sarà $5'$, poichè non è difficile prevedere che quantunque **1000** non contenga tre volte **400**, pure a motivo del penultimo termine avremo un residuo **+ 97** dello stesso segno dell'ultimo termine **+ 1000**.

	1 − 15 + 68 − 83
6	1 − 9 + 14 + 1
	1 − 3 − 4
	1 + 3
	1 + 30 − 400 + 1000
3′	1 + 33 − 301 + 97
	1 + 36 − 193
	1 + 39
	0,1 + 39 − 1930 + 9700
5″	0,1 + 39,5 − 1732,5 + 1037
	,1 + 40,0 − 1532,5
	,1 + 40,5
	0,40 − 153,3 + 1037
6″	0,4 − 150,9 + 132
8″	− 14,85 + 13
9′	− 1,5 0

Nel passare alla successiva tabella riteniamo una cifra di più di quello che nel § precedente, perchè la piccolezza dei termini farebbe che si temesse di non ottenere nella radice quattro decimali esatte. — La seconda radice si trova $x = 6{,}35689$.

46. Volendo trovare direttamente la terza radice (la quale del resto dà colle altre due la somma 15) potremo osservare che pel teorema del Rolle (§ 25) l'ultimo termine non può svanire due volte senza che nell'intervallo svanisca il penultimo; perciò se calcoleremo la trasformata col penultimo termine nullo, noi ci saremo avvicinati, ma non avremo oltrepassata l'ultima radice. Ora la trasformata in $(x' - 3) = 10\,x - 63$ ha i coefficienti **1 + 39 − 193 + 97**, e per annullare il penultimo termine occorrerebbe calcolare una nuova tabella con una cifra eguale (§ 43) all'incirca a **193 : 2 . 39**; sicchè volendo un poco più avvicinarsi alla cercata radice adopreremo ancora la cifra $3'$, ed otterremo i coefficienti **1 + 48 + 68 − 104** della trasfor-

mata in $(x-6)=(10\,x-66)$.

	1	+ 39	— 193	+ 97
3′	1	+ 42	— 67	— 104
	1	+ 45	+ 68	
	1	+ 48		

	0,1	+ 48	+ 680	— 10400
9″	,1	+ 48,9	+ 1120,1	— 319
	,1	+ 49,8	+ 1568,3	
	,1	+ 50,7		

	+ 0,51	+ 156,8	— 319
2‴	0,51	+ 157,8	— 3
0		15,88	— 3
2		1.6	0

In questa noteremo che **104** non è gran fatto maggiore di **68**, il quale nel formare la tabella viene ad accrescersi in causa dei termini precedenti; scorgeremo quindi l'opportunità di passare alla successiva decimale che troveremo **9**″. In fine avremo la terza radice $x=6{,}69202$.

47. Essendosi trovate tre radici è certo (§ **17**) che la proposta equazione non ne ammette alcun'altra; del resto se avessimo voluto cercare le radici negative avressimo cangiato x in $-x$, e siccome la nuova equazione $x^3+15\,x^2+68\,x+85=0$ non presenta alcuna variazione, così avressimo riconosciuto che nè questa ha radici positive, nè la proposta ne ha di negative.

48. Esempio II. Sia proposta la

$$x^5-18\,x^4+105\,x^3-206\,x^2+70\,x-8=0\,.$$

Si vede che la prima tabella formata colla cifra **1** non è terminata,

	1	— 18	+ 105	— 206	+ 70	— 8
1	1	— 17	+ 88	— 118	— 48	— 56
	....					

perchè essendovi la perdita di due variazioni noi conosciamo (§ **22**) che fra **0** ed **1** vi è o un paio di radici od un valor critico; nè il criterio del § **34** è sufficiente a mostrare l'assenza delle radici.

1	— 18	+ 105	— 206	+ 70	— 8
— 36	— 54	+ 52	— 154	+ 8	0

Passiamo adunque ai decimi e prendiamo la cifra $2'$ che tendendo ad annullare il penultimo termine ci lascierà più facilmente separare le due radici se esistono;

	1	−180	+10500	−206000	+700000	−800000
$2'$	1	−178	+10144	−185712	+328576	−142848
	1	−176	+9792	−166128	−3680	
	....					

Siccome ancora spariscono due variazioni, così cercheremo se il nostro criterio sia valevole ad assicurarci dell'assenza di radici nell'intervallo da 0 a $0,2$; ponendo $x=2y:10$ resterà da sapere se la

$$4y^5-360y^4+10500y^3-103000y^2+175000y-100000=0$$

ammetta radici da $y=0$ ad $y=1$; quindi faremo il seguente calcolo

	4	−360	+10500	−103000	+175000	−100000	
1	+....	+17860	+17500	+28000	−75000	+100000	0

e nella seconda riga essendovi un solo termine negativo, e questo compreso fra due positivi e seguito da uno di maggior valore, noi saremo certi che l'equazione proposta ha un valor critico tra 0 e $0,2$.

49. Gli ultimi termini della trasformata in $(x'-2)$ avendo segni eguali fanno presentire che le altre radici sieno lontane, e se adopreremo la cifra 10 conosceremo colla perdita di tutte le variazioni che al di là del 10 non vi sono nè radici nè valori critici; quindi

	1	−18	+105	−206	+70	−8
10	1	−8	+25	+44	+510	+5092
	1	+2....				

tornerà più opportuno adoperare la cifra 3, la quale tendendo ad annullare il secondo termine c'insegnerà a separare i due valori che annullano il terzo termine, e così in seguito, nel caso che fossimo costretti a seguire passo a passo le indicazioni del teorema del Rolle.

	1	−18	+105	−206	+70	−8
3	1	−15	+60	−26	−8	−32
	1	−12	+24	+46	+130	
	1	−9	−3	+37		
	1	−6	−21			
	1	−3				

Del resto fatto il calcolo scorgiamo subito che una radice è molto vicina, e passando ai decimi

	0,0001	−0,003	−0,21	+3,7	+130	−320
2′	,0001	− ,0028	− ,216	+ 3,27	+ 136,5	− 47
	,0001	− ,0026	− ,221	+ 2,83	+ 142,2	
	....					

vediamo che è all'incirca $x = 5,25$.

50. Dopo la precedente radice ci resteranno ancora due variazioni. le quali indicano due radici od un valor critico compreso da **5,25** a **10**; calcoleremo perciò la trasformata intermedia in $(x-6)$, i cui coefficienti o dedotti da quelli della proposta o dedotti da quelli già trovati per la trasformata in $(x-5)$ sono $\mathbf{1+12+53-44-}$ $\mathbf{-134+124}$, e mostrano la vicinanza di un'altra radice che si trova poco superiore a **6,90**.

	0,0001	+0,012	+0,33	−4,4	−134	+1240
9′	,0001	+ ,0129	+ ,446	− ,39	− 137,5	+ 2
	,0001	+ ,0138	+ ,570	+ 4,74	− 94,8	

51. I coefficienti della trasformata in $(x-6)$ danno facilmente (§ **11**) quelli della trasformata in $(x-7)$ $\mathbf{1+17+91+157-70-8}$, e quantunque i due ultimi termini abbiano segni eguali, pure è facile prevedere che siamo vicini ad una radice; passando ai decimi il valore che annulla il penultimo termine della prima riga è circa **4′**

	0,001	+0,17	+ 9,1	+137	−700	−800
4′	,001	+ ,174	+ 9,796	+ 176,18	+ 4,7	− 781
	,001	+ ,178	+ 10,508	+ 218,21	+ 877,5	
	,001	+ ,182	+ 11,236	+ 263,15		

e si vede che l'ultima radice è circa $x = \mathbf{7,47}$.

52. Esempio III. Sia proposta l'equazione

$$x^4 - 20\,x^2 + 101 = 0$$

la quale presentando due sole variazioni di segno potrebbe avere tutto al più due radici positive. Posti degli zeri in luogo dei termini man-

canti ed adoperata la cifra 3,

$$\begin{array}{r|l} & 1+\ 0-20-\ 0+101 \\ \hline 3 & 1+\ 3-11-33+\ \ 2 \\ & 1+\ 6+\ 7-12 \\ & 1+\ 9+34 \\ & 1+12 \end{array}$$

la piccolezza dell'ultimo termine c'indica che se vi è una radice dev'essere poco lontana; perciò passando ai decimi adopreremo la cifra 2′, la quale tendendo ad annullare il penultimo termine sarebbe opportuna a separare (§ 26) le due radici; ma si vedrà che spariscono le due variazioni, e che perciò o il valor critico o ambedue le radici esistono nell'intervallo da 3 a 3,2. Ora il nostro criterio applicato anche al più largo intervallo da 3 a 4 mostra che non esistono radici, poichè il numero $18=12^2:4.2$ è il solo che sia positivo;

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 1+12+34-12+2 \\ \hline 1 & -29-28-16+18-\ 2\quad 0 \end{array}$$

dunque si ha un valor critico da 3 a 3,2. Mutando x in $-x$ l'equazione non cangia, perciò essa ha un altro valor critico da -3 a $-3{,}2$.

33. Esempio IV. Anche per le equazioni del secondo grado il metodo di risoluzione che abbiamo esposto riesce più speditivo dell'uso della nota formula che esprime le radici di tali equazioni mediante radici seconde di quantità (§ 15). Serva di esempio la ricerca della radice positiva dell'equazione

$$0{,}1254\,.\,x^2-36{,}11\,.\,x-6698=0$$

i cui coefficienti si suppongono soltanto approssimati, sicchè a motivo della prima cifra 400 l'indecisione nell'ultima cifra di 0,1254 porta dell'indecisione nell'ultima cifra di 1078, per lo che sarebbe inutile protrarre i calcoli più in là, e si trova $x=416{,}3$.

$$\begin{array}{r|llll} & 0{,}1254 & -36{,}11 & -6698 \\ \hline 400 & ,1254 & +14{,}05 & -1078 \\ & ,1254 & +64{,}21 & \\ \hline 10 & ,1254 & +65{,}46 & -\ \ 423 \\ & ,1254 & +66{,}71 & \\ \hline 6 & ,13 & +67{,}5 & -\ \ \ 18 \\ & ,13 & +68{,}3 & \\ \hline 3' & & +6{,}8 & +\ \ \ \ 2 \end{array}$$

34. In pratica si possono semplificare le tabelle di calcolo; così per la radice positiva della

$$x^2+3x-32=0$$

riunendo insieme tutte le tabelle si formò il seguente calcolo, dove la prima cifra 4 della cercata radice si unì al 3, e pel risultante 7 si è diviso il 32, il che diede, oltre il quoziente 4 (già scritto), il residuo 4 a cui si aggiunsero due zeri; il 4 si è unito una seconda volta al 7, ed accanto all'11 si scrisse il 3, che è la seconda cifra 3 ottenuta dividendo 40 per 11; poscia il 113 ed il 400 diedero il quoziente 3′ (già scritto) ed il residuo 61, a cui si aggiunsero due zeri; e così di seguito fino a che, avendo ottenuta la metà delle cifre desiderate, si cessò di aggiungere zeri ai dividendi, e si procedette tagliando ogni volta una cifra all'ultimo divisore 11704:

	1 + 3	− 32
4	1 + 7	− 400
3′	113	6100
5″	1165	27500
2‴	11702	40960
3^{IV}	11704,3	5847
4^{V}	1170,4	1165
9^{VI}	117,0	112
9^{VII}	11,7	7

così si trovò $x=4{,}352350$.

§ VI.

Espressione delle radici mediante frazioni continue

35. Il metodo più usitato e più comodo per esprimere i numeri approssimati si è quello delle frazioni decimali; nulladimeno può talvolta tornar opportuno di adoperare invece le frazioni continue a denominatori interi. È palese che una quantità x, che superi l'intero a di una frazione minore dell'unità, potrà esprimersi con $x=a+1/y$, essendo y una quantità maggiore di uno, la quale a sua volta potrà esprimersi coll'intero b e colla frazione $1/z$ essendo z una quantità

maggiore di uno, ecc.; sicchè sostituendo avremo $x=a+1/b+1/c+$ $+1/d+$ ecc. (dove coi segni di divisione posti inclinati indico che il denominatore del primo 1 è tutta la quantità

$$b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{ecc.}}}\quad,\ \text{ecc.}).$$

Il Lagrange si servì appunto delle frazioni continue per esprimere approssimatamente le radici delle equazioni; ma siccome non conosceva il teorema che fu poi scoperto dal Fourier (§ 22), così egli doveva da prima separare tutte le radici, per esser sicuro di non oltrepassare alcuno degl'intervalli contenente qualche paio di radici. Il citato teorema insegna che tali intervalli sono contraddistinti dalla perdita di qualche paio di variazioni; il solo piccolo inconveniente a cui si possa andar incontro si è di cominciare qualche calcolo che poscia si riconosca inutile, per esservi invece di un paio di radici un valor critico.

56. Ecco il metodo da seguirsi: si formino nel solito modo (§ 2) le trasformate in $(x-a)$ della data equazione, essendo a un numero intero positivo, non escluso lo zero; e senza curarsi degli intervalli, nei quali non vi sono perdite di variazioni di segno, si ristringano gli altri intervalli in guisa che dalla trasformata in $(x-a)$ a quella in $(x-a-1)$ vi sia la perdita di almeno una variazione. Quanto ora si dirà per questo intervallo dalla trasformata in $(x-a)$ a quella in $(x-a-1)$ si ripeterà per ogni altro intervallo: è palese che il numero di tali intervalli non potrà mai superare il numero delle radici, più quello dei valori critici. Si ponga $x-a=1:y$, poscia si moltiplichi l'equazione per la conveniente potenza della y in guisa da darle la forma consueta, così per esempio la

$$A(x-a)^4+B_4(x-a)^3+\ldots.+E_4=0$$

darebbe

$$E_4y^4+D_4y^3+C_4y^2+B_4y+A=0\,;$$

è evidente che quanti saranno i valori di x compresi tra a e $a+1$, altrettanti saranno i valori di y da uno all'infinito; perciò (§ 22) « se la trasformata in $(y-1)$ abbia un numero di variazioni minore del

numero delle variazioni perdute dalla equazione in $(x-a)$ a quella in $(x-a-1)$, la differenza di tali numeri sarà pari, e la sua metà sarà uguale all'eccesso del numero dei valori critici compresi tra $x=a$ ed $x=a+1$ sopra quello dei valori critici compresi tra $y=1$ ed $y=\infty$ ». — Sulla equazione in y si opererà come si fece per quella in x, vale a dire, se tra due trasformate in $(y-b)$ ed $(y-b-1)$, essendo b un numero intero maggiore di zero, vi sia la perdita di una o più variazioni, si ponga $y-b=1:z$, e si dica dell'equazione in z quello che si disse dell'equazione in y. Nel presente metodo di soluzione non occorrono i criterii che dimostrano l'assenza di radici, poichè tale mancanza si viene a conoscere mediante le precedenti considerazioni: io non mi fermo su questo argomento, da me aggiunto al solo fine che il lettore trovi qui riunito tutto quanto può tornar vantaggioso alla numerica risoluzione delle equazioni.

37. Sia proposta per esempio l'equazione

$$x^5-4x^4+7x^3-9x^2+10x-6=0,$$

le unite tabelle di calcolo

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-4+7-9+10-6 \\
\hline
1 & 1-3+4-5+\ \ 5-1 \\
 & 1-2+2-3+\ \ 2 \\
 & 1-1+1-2 \\
 & 1+0+1 \\
 & 1+1 \\
\hline
1 & 1+2+3+1+\ \ 3+2 \\
 & \ldots\,.
\end{array}$$

ambedue eseguite colla cifra 1, e delle quali la seconda non è terminata, ciò riuscendo inutile, mostrano che due variazioni di segno spariscono dall'equazione in x a quella in $(x-1)$, e tre da questa a quella in $(x-2)$. In riguardo alle prime si ponga $x=1:y$ e si avrà l'equazione

$$-6y^5+10y^4-9y^3+7y^2-4y+1=0,$$

la cui trasformata in $(y-1)$ non ha alcuna variazione; dunque la proposta non può avere alcuna radice minore di uno, e la perdita di quelle variazioni dipende da un valor critico.

$$\begin{array}{r|llllll} & -6 & +10 & -9 & +7 & -4 & +1 \\ \hline 1 & -6 & +4 & -5 & +2 & -2 & -1 \\ & -6 & -2 & -7 & -5 \ldots & & \\ & \ldots & & & & & \end{array}$$

In quanto alle tre variazioni perdute da $(x-1)$ a $(x-2)$ si ponga $x-1=1:y$ e si avrà l'equazione

$$-y^5+2y^4-2y^3+y^2+y+1=0,$$

$$\begin{array}{r|llllll} & -1 & +2 & -2 & +1 & +1 & +1 \\ \hline 1 & -1 & +1 & -1 & -0 & +1 & +2 \\ & -1 & -0 & -1 & -1 & -0 & \\ & -1 & -1 & -2 & -3 & & \\ & -1 & -2 & -4 & & & \\ & -1 & -3 & & & & \end{array}$$

la cui trasformata in $(y-1)$ ha una sola variazione; dunque due di quelle tre variazioni sono dovute ad un valor critico. Resta da considerare il valore di $y>1$, il quale è palesemente <2, perchè la trasformata in $(y-2)$ non ha alcuna variazione; noi dunque porremo $y-1=1:z$ ed avremo l'equazione

$$2z^5-3z^3-4z^2-3z-1=0$$

$$\begin{array}{r|llllll} & 2 & -0 & -3 & -4 & -3 & -1 \\ \hline 1 & 2 & +2 & -1 & -5 & -8 & -9 \\ & 2 & +4 & +3 & -2 & -10 & \\ & 2 & +6 & +9 & +7 & & \\ & 2 & +8 & +17 & & & \\ & 2 & +10 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|llllll} & -9 & -10 & +7 & +17 & +10 & +2 \\ \hline 1 & -9 & -19 & -12 & +5 & +15 & +17 \\ & -9 & -28 & -40 & -35 & -20 & \\ & -9 & -37 & -77 & -112 & & \\ & -9 & -46 & -123 & & & \\ & -9 & -55 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|llllll} & 17 & -20 & -112 & -123 & -55 & -9 \\ \hline 3 & 17 & +31 & -19 & -180 & -595 & -1794 \\ & 17 & +82 & +227 & +501 & +908 & \\ & 17 & +133 & +626 & +2379 & & \\ & 17 & +184 & +1178 & & & \\ & 17 & +235 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|llllll} & -1794 & +908 & +2379 & +1178 & +235 & +17 \\ \hline 1 & -1794 & -886 & +1493 & +2671 & +2906 & +2923 \\ & \ldots & & & & & \end{array}$$

la cui trasformata in $(z-1)$ mostra che si deve porre $z-1=1:t$ ottenendosi

$$-9t^5-10t^4+7t^3+17t^2+10t+2=0,$$

continuando porremo $t-1=1:u$ ed avremo

$$17u^5-20u^4-112u^3-123u^2-55u-9=0,$$

poscia $u-3=1:v$, ecc., sicchè avremo

$$x=1+1/1+1/1+1/1+1/3+1/1+\text{ecc.}$$

Operando col metodo da noi preferito (§ V) si ottiene molto più speditamente $x=1,64074397$.

38. Si ricerchi per secondo esempio se l'equazione

$$x^4-12x^3+50x^2-84x+49=0$$

abbia radici maggiori di 4: siccome la trasformata in $(x-5)$ non ha variazioni, così le due radici maggiori di 4 se esistono sono comprese tra $x=4$ ed $x=5$. Poniamo $x-4=1:y$, ed avremo l'equazione

$$y^4-4y^3+2y^2+4y+1=0,$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-12+50+84+49 \\ \hline
4 & 1-\ \ 8+18-12+\ \ 1 \\
 & 1-\ \ 4+\ \ 2-\ \ 4 \\
 & 1+\ \ 0+\ \ 2 \\
 & 1+\ \ 4 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-4+2+4+1 \\ \hline
2 & 1-2-2-0+1 \\
 & 1+0-2-4 \\
 & 1+2+2 \\
 & 1+4 \\
\end{array}$$

le cui variazioni si perdono dalla trasformata in $(y-2)$ a quella in $(y-3)$: porremo adunque $y-2=1:z$ ed avremo

$$z^4-4z^3+2z^2+4z+1=0,$$

la cui trasformata in $(z-2)$ conserva ancora due variazioni, le quali si perdono nel passaggio alla trasformata in $(z-3)$; perciò è ancora dubbioso se si tratti di un paio di radici o di un valor critico. E quanto più andremo innanzi coi calcoli senza che spariscano le due variazioni, tanto più si renderà probabile che le due radici non si possano separare per essere affatto uguali; e quindi tornerà oppor-

tuno ricercare direttamente se la equazione abbia radici multiple, del che tratteremo in seguito. Del resto nel nostro caso, siccome la equazione in z è identica con quella in y, è palese senza più, che la proposta ha una radice doppia il cui valore è espresso dalla frazione estesa all'infinito $x = 4 + 1/2 + 1/2 + 1/2 +$ ecc.

§ VII.

Teorema dello Sturm e determinazione delle radici multiple

59. Se per compiuta risoluzione delle equazioni si volesse intendere la determinazione di tutte le radici e di tutti i valori critici, il teorema del Fourier (§ 22) non lascierebbe nulla a desiderare, giacchè per ogni intervallo esso indica la presenza o l'assenza di radici o di valori critici; poscia il teorema del Rolle (§ 25) sussidiato da quello del Fourier (§ 30) guida nella scelta delle cifre per calcolare le trasformate in guisa da separare tutte le radici o valori critici. Ma la compiuta risoluzione delle equazioni si riferisce soltanto alla ricerca delle radici, per lo che tornano vantaggiosi quei criterii che risparmiano ricerche inutili, col far distinguere gli intervalli che contengono radici da quelli che comprendono i valori critici. Moltissimi criterii furono a tal uopo trovati, e ci sembra che quello esposto al § IV sia preferibile perchè comodo nelle applicazioni e facile da ricordarsi; ma tutti tali criterii erano imperfetti in quanto che si avea certezza di non escludere intervalli contenenti radici, ma non di escludere tutti quelli contenenti soltanto valori critici. Il Cauchy fu il primo (1813) a trovare un criterio completo, vale a dire una regola sicura per conoscere il numero delle radici comprese in un certo intervallo; ma è molto più semplice il celebre teorema dello Sturm, che ora brevemente esporremo.

60. Abbiamo veduto al § 21 che dai coefficienti A, B, C, D, E di un'equazione in x a quelli $A\ B_4\ C_4\ D_4\ E_4$ della sua trasformata in $(x - a)$ si perdono tante variazioni di segno quante sono le volte che nell'intervallo da $a = 0$ ad a si annulla l'ultimo termine $E_4 = A\,a^4 +$

$+Ba^3+Ca^2+Da+E$, ed inoltre si perde un paio di variazioni ogni qualvolta si annulli un termine compreso fra due di egual segno; perchè adunque il numero delle variazioni perdute sia eguale al solo numero delle radici bisognerà sostituire alle precedenti quantità $A\ B_4\ C_4\ D_4\ E_4$ dipendenti (tranne la prima) dal valore di a, altre quantità $F_4\ F_3\ F_2\ D_4\ E_4$ tali che una delle intermedie non possa annullarsi se non quando quelle tra cui essa è compresa abbiano segni opposti; e in secondo luogo la prima F_4 conservi sempre lo stesso segno: allora ogni cangiamento di segno dell'ultima E_4 darà, come vedemmo (§ 21), la perdita di una variazione; poichè noi facciamo per ora astrazione dal caso che le due ultime $E_4\ D_4$ svaniscano insieme, cioè che l'equazione proposta abbia radici multiple.

61. I due ultimi polinomii $E_4\ D_4$ sono adunque gli stessi tanto nel teorema del Fourier, quanto in quello dello Sturm; noi vi cangeremo a in x e li esprimeremo con

$$F=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E,\qquad F'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D;$$

ora se l'antipenultima F_2 sia data da $F_2=-F+\varphi_1 F'$, essendo φ_1 una funzione della x, la quale non divenga mai infinita; se avvenga che la F' si annulli essa sarà compresa fra due $F_2=-F$, ed F di segno opposto; pertanto le quantità $F_4\ F_3\ F_2\ F'\ F$ soddisfaranno alla prima condizione se sia analogamente

$$F_2=-F+\varphi_1 F',\qquad F_3=-F'+\varphi_2 F_2,\qquad F_4=-F_2+\varphi_3 F_3;$$

e soddisfaranno anche alla seconda, se le $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$ sieno binomii della forma $hx+k$, tali che, essendo F del quarto grado ed F' del terzo, F_2 risulti del secondo, F_3 del primo ed F_4 sia una quantità indipendente dalla x. «Determinati in tal guisa i polinomii .... F_3, F_2, F', F se noi vi sostituiremo in luogo di x i due valori quali si vogliano a e $b>a$, tanto sarà il numero di variazioni che la serie .... $F_3\ F_2\ F'\ F$ perderà nel passare da $x=a$ ad $x=b$ quante sono le radici della $F=0$ comprese nell'intervallo da a a b».

62. Serva di esempio l'equazione

$$x^4-4x^3+36x^2-108x+81=0$$

avremo

$$F=x^4-4x^3+36x^2-108x+81,\qquad \frac{F'}{4}=x^3-3x^2+18x-27,$$

dove il secondo polinomio fu diviso per 4, giacchè trattandosi di considerare i soli segni delle quantità, esse si possono dividere o moltiplicare per qualunque numero positivo: poscia

$$F_2 = -F + \varphi_1 F' = 3(-5x^2 + 21x - 18)$$

essendo $\varphi_1 = (x-1):4$ e progredendo, dovremo dividere $-F':4$ per $F_2:5$; e ad evitare le frazioni divideremo invece $-25F':4$ per $F_2:5$ ed avremo

$$F_3 = -\frac{25}{4}F' + \varphi_2 F_2 = 27(-18x + 29)$$

essendo

$$\varphi_2 = -\frac{5x+6}{3}$$

e finalmente

$$F_4 = -108F_2 + \varphi_3 F_3 = -925$$

essendo

$$\varphi_3 = \frac{90x - 233}{27},$$

perciò (posto per brevità $F' = 4f_1$, $F_2 = 3f_2$, $F_3 = 27f_3$) dovremo osservare i segni delle quantità

$$(*) \qquad -925, \quad f_3 = -18x + 29, \quad f_2 = -5x^2 + 21x - 18,$$
$$f_1 = x^3 - 3x^2 + 18x - 27, \quad F = x^4 - 4x^3 + 36x^2 - 10x + 81.$$

I valori di questi polinomii si possono o calcolare direttamente introducendovi i singoli valori di x, o dedurre dai valori dei primi termini -925, f_3 mediante le relazioni

$$f_2 = \frac{925 + (90x - 233)f_3}{324}, \quad f_1 = \frac{-27f_3 - (5x+6)f_2}{125}, \quad F = -3f_2 + (x-1)f_1;$$

oppure si potranno dedurre dai valori dei coefficienti delle trasformate, i quali sono (§ 40)

$$E = x^4 - 4x^3 + 36x^2 - 108x + 81, \quad D = 4x^3 - 12x^2 + 72x - 108$$
$$C = 6x^2 - 12x + 36, \quad B = 4x - 4, \quad A = 1,$$

sicchè le quantità (*) sono anche

$$(**) \qquad -925, \quad f_3 = -\frac{9}{2}B + 11A$$

$$f_2 = -\frac{5}{6}C + \frac{11}{4}B + 23A, \quad f_1 = \frac{1}{4}D, \quad F = E.$$

Queste ultime formule sono particolarmente comode in quanto che, per avvicinarsi ai valori delle radici, occorre determinare i coefficienti delle successive trasformate, e, quando si conoscano B, C, si scorgerà quasi sempre a colpo d'occhio quali sieno i segni dei f_3 f_1; e può anche notarsi che se f_3 e f_1 abbiano segni opposti, non occorre ricercare qual sia il segno di f_2 (giacchè esso non cangia il numero delle variazioni). Non rade volte basterà conoscere i numeri totali delle radici positive e delle negative; ora tali numeri si desumono dai segni degli ultimi e dei primi termini dei polinomii (*). La nostra equazione non può avere radici negative, ed atteso le 4 variazioni che essa presenta, potrebbe avere 4 radici positive; ma quando è $x=0$ i polinomii (*) avendo i segni $-+--+$ presentano 3 variazioni, e quando $x=\infty$ hanno i segni $---++$ con una variazione, dunque due sole sono le radici positive. L'equazione e le sue trasformate in $(x-1)$ ed in $(x-3)$ hanno i coefficienti

(0)	$1-4+36-108+81$	(4 variazioni)
(1)	$1+0+30-44+6$	(2 variazioni)
(3)	$1+8+54+108+54$	(nessuna)

Si potrebbe domandare se le due radici positive cadono tra 0 ed 1. oppure tra 1 e 3; ora le formule (**) applicate alla trasformata (1) mostrano che i segni sono $-+\ \ -+$ (avendosi trascurato di determinare il segno di f_2, giacchè esso cade fra due segni opposti), perciò le tre variazioni si conservano da 0 ad 1, sicchè in quell'intervallo non cadono radici; quindi le sole radici reali sono quelle indicate dalle variazioni della trasformata (1): non si determinarono i segni delle (**) corrispondenti alla (3), perchè si sapeva ch'essi deggiono presentare una variazione tanto come quelli corrispondenti ad $x=\infty$, giacchè la mancanza di variazioni della (3) rende sicuri che nessuna radice è maggiore di 3. Del resto senza usare del teorema dello Sturm bastava osservare, che la trasformata in $(x-1)$ ha un coefficiente nullo compreso fra due di segni uguali, per riconoscere che $x=1$ è un valore critico; così pure il dubbio sulla realtà delle radici tra 1 e 3 è tolto dalla trasformata in $(x-2)$, la quale ha l'ultimo termine negativo.

63. Potrà avvenire che il polinomio $F = A x^n + B x^{n-1} +$ ecc., ed il suo *derivato* $F' = n A x^{n-1} + (n-1) B x^{n-2} +$ ecc. abbiano un qualche fattore comune; in tal caso lo stesso fattore dividerà pure senza residuo tutti gli altri polinomii $F_2 = -F + \varphi_1 F'$, $F_3 = -F' + \varphi_2 F_2$, $F_4 = -F_2 + \varphi_3 F_3$, ecc., e perciò giungeremo finalmente a $F_{m+1} = -F_{m-1} + \varphi_m F_m = 0$ ed F_m sarà il fattor comune a tutti i F_{m-1}, F_{m-2}, ... F_2, F', F; quindi, posto $F = F_m G$, la data equazione $F = 0$ si decomporrà nelle due $F_m = 0$, $G = 0$, le quali saranno più facili da risolvere perchè di grado meno elevato. Questa decomposizione non mancherà mai di aver luogo quando l'equazione $F = 0$ ammetta delle radici multiple (§ 18), ed i fattori multipli del polinomio F saranno sempre anche fattori del polinomio F_m, ma vi saranno contenuti una volta di meno; sicchè anche F_m e G (eccettuato il caso che sieno uguali) avranno un fattore comune, e si potranno ancora abbassare di grado le due equazioni $F_m = 0$ $G = 0$. Noi dunque abbiamo veduto che «gli stessi calcoli coi quali si trovano i polinomii, che secondo il teorema dello Sturm (§ 61) servono a determinare i numeri delle radici comprese in dati intervalli, fanno anche conoscere se la proposta equazione ammetta radici multiple, ed in tal caso servono ad abbassarla di grado».

64. Nel suddetto caso che la serie dei polinomii F, F', F_2, F_3 ...., anzichè terminare (§ 61) con una quantità F_n indipendente da x, termini col polinomio F_m, non sussiste la dimostrazione data al § 60, poichè tutti i polinomii possono svanire insieme; nulladimeno se non si voglia rifare i calcoli relativamente alle nuove equazioni, nelle quali la proposta viene a decomporsi, si potranno adoperare i polinomii

$$(\mathrm{A}) \qquad 1, \quad \frac{F_{m-1}}{F_m}, \quad .... \frac{F_2}{F_m}, \quad \frac{F'}{F_m}, \quad \frac{F}{F_m}$$

i quali sono tra loro dipendenti mediante le solite relazioni

$$\frac{F_2}{F_m} = -\frac{F}{F_m} + \varphi_1 \frac{F'}{F_m}, \quad .... 1 = -\frac{F_{m-2}}{F_m} + \varphi_{m-1} \frac{F_{m-1}}{F_m}$$

e pei quali ancora si verifica la condizione, che ogni valore che fa svanire l'ultimo termine $F : F_m$, produce la perdita di una variazione. D'al-

tronde se invece della serie (A) si prenda la serie

$$(B) \quad F_m, \quad F_{m-1}, \quad \ldots F_2, \quad F', \quad F$$

e vi si sostituiscano in luogo di x due valori a b, nessuno dei quali annulli la F, il numero delle variazioni di segno sarà il medesimo tanto nella serie (B) quanto nella (A); perciò al numero di variazioni perdute da $x=a$ ad $x=b$ sarà eguale il numero delle radici della $F=0$ fra loro differenti e comprese nell'intervallo da a a b.

§ VIII.

Determinazione dei fattori del secondo grado dei polinomii, e quindi anche delle radici immaginarie delle equazioni

65. Quei polinomii algebraici, che non possono decomporsi in fattori del primo grado, possono sempre decomporsi in fattori della forma $x^2-2ax+a^2+b$; la qual verità si esprime anche dicendo, che le equazioni algebraiche che non ammettono radici reali, hanno sempre le radici immaginarie della forma $x=a+\sqrt{(-b)}$, essendo b una quantità positiva. Fu molto cercato un metodo generale e sicuro per la determinazione di tali radici immaginarie, ma credo che tutti i metodi finora proposti richieggano lunghi calcoli numerici; spero perciò che sia accolto favorevolmente un metodo che non è gran fatto più laborioso di quello con cui si trovano le radici reali, e che procede con un algoritmo in gran parte identico a quello che serve per le radici reali.

66. Per riconoscere se il polinomio $Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+$ $+Ex^2+Fx+G$ sia divisibile per x^2+b, s'intende facilmente che basterà osservare se i due polinomii che noi diremo *ausiliarii*

$$By^2-Dy+F \qquad -Ay^3+Cy^2-Ey+G$$

sieno divisibili per $y-b$; perciò, se noi troveremo che le due *equazioni ausiliarie*

$$By^2-Dy+F=0, \quad -Ay^3+Cy^2-Ey+G=0$$

abbiano una radice comune $y=b$, noi ne dedurremo che il proposto polinomio ha il fattore x^2+b. D'altra parte abbiamo già veduto (§ 2) con qual facile algoritmo si passi dal proposto polinomio a quello trasformato in $(x-a)$, e, se le equazioni ausiliarie provenienti da quest'ultimo ammettano la radice comune b, noi ne dedurremo come sopra che il polinomio trasformato ha il fattore $(x-a)^2+b$, e che perciò il polinomio proposto è divisibile per $x^2-2ax-a^2+b$. — Viene da ciò che, se per due polinomii trasformati corrispondenti a due valori non molto discosti di a si sieno trovate tutte le radici reali delle due equazioni ausiliarie, e dal confronto di queste radici si possa arguire che per un valore di a compreso fra quei due le equazioni ausiliarie abbiano una radice comune, si potrà, dando ad a dei valori intermedii, accostarsi indefinitamente alla esatta determinazione di a e di b. Per esempio se ad $a=1$ corrispondano due equazioni ausiliarie, la prima delle quali abbia le radici 2, 9, e la seconda le radici 4, 10, 12, e, se ad $a=2$ corrisponda una prima equazione ausiliaria nella quale le due radici si sieno cangiate in un valor critico, mentre anche nella seconda equazione ausiliaria le due prime radici sieno divenute immaginarie, noi ne dedurremo che nell'intervallo fra $a=1$ ed $a=2$ le due radici 2, 9, nell'avvicinarsi fino a divenir uguali per poscia mutarsi nel valor critico, si sono uguagliate ad una delle radici 4, 10, le quali pure tendono ad avvicinarsi; così si scorgerà l'opportunità di tentare un valore intermedio tra $a=1$ ed $a=2$. Mediante analoghe considerazioni si giungerà ad ottenere un polinomio trasformato tale che le due equazioni ausiliarie abbiano due radici quanto si voglia tra loro approssimate.

67. Quantunque il metodo precedente possa sembrare dubbioso ed indeterminato, nulladimeno in pratica esso guida non molto indirettamente allo scopo proposto; ma d'altra parte, essendo pur possibile che si rimanga delusi nella speranza di trovare in un certo intervallo un valore di a, a cui corrisponda uno dei cercati fattori del secondo grado, e ciò per non esistere quella continuità nelle radici delle due equazioni ausiliarie che implicitamente si è supposta; così torna molto opportuno l'uso del seguente criterio di cui per brevità omettiamo la

dimostrazione, la quale del resto si deduce dalla teoria degli *indici* del Cauchy.

68. Si cominci dallo stabilire che per *primo* polinomio ausiliario $By^2 - Dy + F$ intendesi quello che ha per ultimo termine il *penultimo* coefficiente del proposto polinomio $Ax^6 + Bx^5 + Cx^4 + Dx^3 + Ex^2 + + Fx + G$, e i cui altri coefficienti sono quelli che ne distanno di 2, di 4 ecc. posti, presi alternativamente coi segni cangiati; similmente che il *secondo* polinomio ausiliario $-Ay^3 + Cy^2 - Ey + G$ ha per ultimo termine l'*ultimo* del polinomio proposto. e gli altri suoi coefficienti sono quelli che ne sono distanti di 2, di 4 ecc. posti, presi coi segni alternativamente cangiati: il *primo* polinomio ausiliario eguagliato a zero dà la *prima* equazione ausiliaria. Ciò posto, « per una radice *positiva* della prima equazione ausiliaria si determinino i segni dei valori che prendono il secondo polinomio ausiliario quando vi si sostituisce tal radice, ed il primo polinomio ausiliario quando vi si sostituisce un valore pochissimo inferiore a tal radice; se questi segni sieno opposti si avrà l'*indice* $+1$, se sieno eguali si avrà l'indice -1: si ripeta la stessa considerazione per tutte le radici *positive* della prima equazione ausiliaria: alla somma di tutti questi indici si aggiunga -1 nel solo caso che gli ultimi termini dei due polinomii ausiliarii abbiano segni *opposti*: inoltre, se il polinomio proposto sia di grado *pari*, e se i due primi termini dei polinomii ausiliarii sieno di segni opposti, si aggiunga $+1$: la somma di tutti questi numeri costituirà l'*indice* corrispondente al proposto polinomio. Si calcolino nello stesso modo gli *indici* corrispondenti ai polinomii in $(x - a)$, in $(x - a')$, ecc. La differenza di due di questi *indici* darà il numero delle radici reali od immaginarie della proposta equazione, la cui parte reale è compresa nel corrispondente intervallo »; così si saprà in quali intervalli si debbano ricercare i valori di a che danno i desiderati fattori $x^2 - - 2ax + a^2 + b$. Il precedente teorema sussiste anche se la proposta equazione ammette radici multiple. Per maggior semplicità intendo esclusi i casi nei quali svanisca il primo o l'ultimo termine del primo polinomio ausiliario, o che la prima equazione ausiliaria ammetta qualche radice positiva multipla; questi sono casi eccezionali

che facilmente si evitano mutando alcun poco il valore di a. Sono pure esclusi i casi che il secondo polinomio ausiliario abbia l'ultimo termine nullo, o che esso rimanga annullato da una radice positiva b della prima equazione ausiliaria; giacchè in tali casi si ha immediatamente pel proposto polinomio o il fattore $x-a$ od il $(x-a)^2+b$.

69. In sulle prime non si avrà alcuna norma per la scelta del valore di a, e potranno quindi occorrere più tentativi per calcolare la prima cifra di tal valore; tentativi che saranno del resto regolati dal teorema del § precedente: ma giunti alla seconda od alla terza cifra ci sarà facile prevedere con certezza la cifra seguente, e ciò considerando gli errori corrispondenti ai due valori prossimi attribuiti alla a. Potrà prendersi come errore il valore del secondo polinomio ausiliario quando vi si sostituisce quella radice positiva della prima equazione, che dà il valore approssimato di b; infatti i valori cercati di a e di b debbono annullare ambedue i polinomii approssimati. Si potrebbe anche dai valori approssimati di a e di b dedurne altri più approssimati mediante un calcolo analogo all'approssimazione Newtoniana, e così ottenere in una sol volta più cifre esatte di a; ma credo che in pratica ciò non riuscirà vantaggioso, quando non fosse in sul fine dell'operazione (veggasi la Nota al § 70).

70. Esempio. Si ricercano le radici reali od immaginarie dell'equazione

$$x^6-8x^5+27x^4-52x^3+69x^2-62x+28=0\,;$$

i due polinomii ausiliarii sono

$$\begin{array}{r|rrr}
\multicolumn{4}{r}{-8y^2+52y-62} \\ \hline
1 & -8 & +44 & -18 \\
 & -8 & +36 & \\ \hline
4 & -8 & +20 & +18 \\
 & -8 & -12 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
\multicolumn{5}{r}{-y^3+27y^2-69y+28} \\ \hline
1 & -1 & +26 & -43 & -15 \\
 & & & & \\ \hline
4 & -1 & +23 & +23 & +120 \\
 & & & &
\end{array}$$

Un semplicissimo calcolo fa vedere che delle radici *positive* della prima equazione ausiliaria una è alquanto maggiore di **1**, ed una maggiore di **4**; con queste due cifre **1**, **4** il secondo polinomio prende i valori $-\mathbf{15}$ $+\mathbf{120}$, come si vede dai calcoli soprascritti, che sono le sole

prime righe delle solite tabelle formate colle cifre 1, 4, partendo sempre dai coefficienti $-1+27-69+28$. È facile assicurarsi che i segni degli ultimi termini $-15\ +120$ sono gli stessi di quelli dei valori che si otterrebbero sostituendo nel secondo polinomio i valori esatti delle radici della prima equazione ausiliaria, anzichè i valori approssimati 1, 4. Procedendo ora alla determinazione dell'*indice*, (§ 68) i segni eguali di -18 e -15 danno -1; così pure i $+18$ e $+120$ danno -1, i segni opposti degli ultimi termini $-62\ +28$ danno -1: e quantunque la equazione proposta sia di grado pari, pure nulla si ha da aggiungere in forza dei primi termini dei polinomii ausiliarii, giacchè essi sono di ugual segno; così si ha in complesso l'indice -3.

Col solito calcolo mediante la cifra $a=1$ si trovano i coefficienti $1-2+2-4+10-6+3$ della trasformata in $(x-1)$; essi danno i due polinomii ausiliarii

$$\begin{array}{r|lll} & -2y^2 & +4y & -6 \\ \hline 1 & -2 & +2 & -4 \\ & -2 & -0 & \end{array} \qquad -y^3+2y^2-10y+3$$

Si vede tosto che 1 è un valor critico della prima equazione ausiliaria, e che perciò essa non ha radici positive; l'indice è adunque -1 dipendente dall'opposizione dei segni degli ultimi termini $-6\ +3$. Confrontando questo indice con quello corrispondente ad $a=0$, si deduce che l'equazione proposta ammette due radici tra $a=0$ ed $a=1$; radici che non possono esser reali perchè le equazioni in x ed in $(x-1)$ presentano lo stesso numero di variazioni di segno.

Facendo la supposizione intermedia $a=0{,}2$ si ottengono i due polinomii ausiliarii

$$\begin{array}{r|lll} & -6{,}8\,y^2 & +33{,}44\,y & -39{,}838 \\ \hline 2 & -6{,}8 & +19{,}84 & -\ 0{,}158 \\ & -6{,}8 & +\ 6{,}24 & \\ \hline 0{,}8 & -6{,}8 & +\ 0{,}80 & +\ 0{,}482 \\ & -6{,}8 & -\ 4{,}64 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|llll} & -y^3 & +19{,}6\,y^2 & -43{,}664\,y & +17{,}9847 \\ \hline 2 & -1 & +17{,}6 & -\ 8{,}464 & +\ 1{,}0567 \\ & -1 & +15{,}6 & +22{,}736 & \end{array}$$

e si vede che la prima equazione ausiliaria ha una radice poco superiore a 2 ed una poco superiore a 2,8; ambedue rendono positivo

il secondo polinomio, e vedremo che l'indice è -1, e che perciò le due radici sono comprese tra $a=0$ ed $a=0{,}2$.

Ponendo $a=0{,}1$ si hanno approssimatamente i polinomii

	$-7{,}4\,y^2+42,\ y-49{,}7$		
1	$-7{,}4$	$+34{,}6$	$-15{,}1$
	$-7{,}4$	$+27{,}2$	
0,6	$-7{,}4$	$+22{,}8$	$-\ 1{,}4$
	$-7{,}4$	$+18{,}3$	

	$-y^3+23\,y^2-56\ \ y+22{,}4$			
1	-1	$+22$	-34	$-11{,}6$
	-1	$+21$	-13	
	-1	$+20$		
0,7	-1	$+19$	$+\ 0{,}3$	$-11{,}4$

La prima equazione ausiliaria ha una radice poco inferiore ad $1{,}7$, la quale sostituita nel secondo polinomio gli dà il valore $-11{,}4$ che può considerarsi come l'errore corrispondente ad $a=0{,}1$, mentre $a=0{,}2$ diede l'errore $+1{,}0567$; sicchè può arguirsi che debba essere all'incirca $a=0{,}191$. Non si è calcolato l'indice, poichè, sapendosi che due radici sono comprese fra $a=0$ ed $a=0{,}2$, basta ormai osservare il valore che prende il secondo polinomio quando vi si sostituisce una radice (nel nostro caso la più piccola) della prima equazione, per conoscere da qual parte cadano le due radici.

Partendo dai coefficienti del polinomio in $(x-0{,}2)$ dedurremo mediante la cifra $-0{,}01$ i coefficienti spettanti ad $a=0{,}19$, ed avremo il primo polinomio ausiliario

	$-6{,}86\,y^2+34{,}230\,y-40{,}721$		
1	$-6{,}86$	$+27{,}370$	$-13{,}351$
	$-6{,}86$	$+20{,}510$	
0,9	$-6{,}86$	$+14{,}336$	$-\ 0{,}449$
	$-6{,}86$	$+\ 8{,}162$	
0,05	$-6{,}86$	$+\ 7{,}819$	$-\ 0{,}058$
	$-6{,}86$	$+\ 7{,}476$	
0,008	$-6{,}86$	$+\ 7{,}421$	$+\ 0{,}001$
	$-6{,}86$	$+\ 7{,}366$	

che dà nel solito modo la radice $b=1{,}958$, la quale dee sostituirsi nel secondo polinomio

	$-y^3+19{,}941\,y^2-44{,}678\,y+18{,}388$			
			$-26{,}695$	$+\ 8{,}911$
			$-10{,}510$	$+\ 0{,}401$
			$-\ 9{,}611$	$-\ 0{,}072$
1,958	-1	$+17{,}983$	$-\ 9{,}467$	$-\ 0{,}148$

il che fu qui fatto prendendo per cifra l'intero numero **1,958** (il carattere più piccolo spiega il dettaglio di calcolo con cui si ottenne la prima riga $-1+17{,}985-9{,}467-0{,}148$ della tabella), sicchè il valore $b=1{,}958$ che annulla il primo polinomio dà al secondo il valore $-0{,}148$, che, riguardato come un errore e paragonato coll'errore $+1{,}057$ corrispondente ad $a=0{,}2$, mostra che $a=0{,}19$ deve aumentarsi di circa $0{,}001$, sicchè avremo approssimatamente $a=0{,}191$, $b=1{,}96$. Continuando questi calcoli potremo spingere quanto innanzi vorremo l'approssimazione verso le radici immaginarie $x=a\pm\sqrt{(-b)}$, ossia verso il fattore $(x-a)^2+b$ (Vegg. la Nota III).

71. Trovato un primo fattore, si potrebbe dividere per esso la proposta equazione, che così si abbasserebbe al quarto grado, ma noi ora procederemo alla ricerca diretta degli altri due fattori. Ponendo $a=2$ si trovano i coefficienti $1+4+7+4+5+6+4$ dell'equazione in $(x-2)$, e quindi i due polinomii ausiliarii sono

$$4y^2-4y+6 \qquad -y^3+7y^2-5y+4\,.$$

La prima equazione ausiliaria non ammette radici positive, e perciò l'indice è $+1$ dipendente da ciò che l'equazione proposta è di grado pari e che i primi termini dei due polinomii hanno segni opposti; ne viene che due radici sono comprese tra $a=1$ ed $a=2$, ed il criterio esposto al § 54 ci assicura che tali radici non possono esser reali. Siccome tanto per $a=1$ quanto per $a=2$ la prima equazione ausiliaria manca di radici positive, così non abbiamo alcun dato per arguire il vero valore di a, daremo adunque ad a alcuno dei valori intermedii tra 1 e 2, e ben presto c'imbatteremo in $a=1{,}5$ che conduce ai due polinomii

	$-0{,}2\,y^2$	$+2{,}860\,y$	$-0{,}9304$
0,3	$-0{,}2$	$+2{,}800$	$-0{,}0904$
	$-0{,}2$	$+2{,}740$	
0,03	$-0{,}2$	$+2{,}734$	$-0{,}0084$
13	$-0{,}2$	$+0{,}260$	$+2{,}4496$
	$-0{,}2$	$-2{,}340$	

	$-y^3$	$+0{,}35\,y^2$	$-7{,}0615\,y$	$+2{,}0041$
0,3	-1	$+0{,}05$	$-7{,}0465$	$-0{,}1099$
	-1	$-0{,}25$	$-7{,}1215$	
	-1	$-0{,}55$		
0,03	-1	$-0{,}58$	$-7{,}1389$	$-0{,}3241$
14	-1	$-13{,}65$	$-$	$-$

La prima equazione ausiliaria ha una radice poco maggiore di 0,33 ed una quasi uguale a 14, le quali sostituite nel secondo polinomio gli danno valori negativi; sicchè l'indice è formato da $-1+1$ e da -1 per l'opposizione di segno dei due ultimi termini dei polinomii ausiliarii, quindi l'indice è -1, e le due radici che cerchiamo sono comprese tra $a=1,5$ ed $a=2$. Si troverà all'incirca $a=1,51$, $b=0,29$.

72. Venendo finalmente alla ricerca del terzo paio di radici, osserveremo che $a=3$ dando i coefficienti $1+10+42+92+114+$ $+82+31$ conduce ai polinomii ausiliarii

	$10\,y^2$	$-92\,y$	$+82$
1	10	-82	$+\ 0$
8	10	-12	-14
	10	$+68$	

	$-y^3$	$+42\,y^2$	$-114\,y$	$+\ 31$
1	-1	$+41$	$-\ 73$	$-\ 42$
8	-1	$+34$	$+158$	$+1295$

La prima equazione ausiliaria ha una radice $=1$, ed una poco maggiore di 8; un valore poco inferiore ad 1 dà ai due polinomii segni opposti, lo stesso avviene del valore 8, perciò l'indice è formato da $+1$ e da $+1$, a cui si aggiunge $+1$ perchè la proposta equazione è di grado pari ed i primi termini dei polinomii sono di segno opposto, quindi l'indice è $+3$, e l'ultimo paio di radici cade tra $a=2$ ed $a=3$.

Tentando il valore intermedio $a=2,5$ si ottengono nel solito modo (mediante la cifra 0,5 partendo dai coefficienti già trovati per $a=2$) i coefficienti della trasformata in $(x-2,5)$, ed i due polinomii ausiliarii

	$7\,y^2$	$-30,5\ \ y$	$+18,9375$
0,7	7	$-25,6$	$+\ 1,0175$
	7	$-20,7$	
0,05	7	$-20,35$	$+\ \ 0$

	$-y^3$	$+20,75\,y^2$	$-27,4375\,y$	$+9,328125$
				$+0,621875$
0,75	-1	$+20,$	$-12,4375$	$+0,000000$

sono annullati dallo stesso valore 0,75, perciò si ha esattamente $a=2,5$, $b=0,75$, ed il proposto polinomio ha il fattore $(x-a)^2+b=x^2-$ $-3\,x+7$. Mediante la divisione si ottiene il fattore del quarto grado

$$x^4-3\,x^3+5\,x^2-6\,x+4\,.$$

73. Esempio II. Proponiamoci di trovare i fattori del precedente polinomio

$$x^4 - 3\,x^3 + 5\,x^2 - 6\,x + 4\,,$$

i due polinomii ausiliarii sono

$$\begin{array}{r|l} & 3\,y - 6 \\ \hline 2 & 3 \quad - 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} & y^2 - 5\,y + 4 \\ \hline 2 & 1 - 3 \quad - 2 \end{array}$$

Il primo è annullato da $b = 2$, ed un valor poco minore di questo rende negativi ambedue i polinomii, perciò abbiamo l'indice -1, a cui si aggiunge -1 per l'opposizione di segno degli ultimi termini -6, $+4$, sicchè l'indice è -2.

Ponendo $a = 1$ si ottengono i coefficienti $1 + 1 + 2 - 1 + 1$, ed i due polinomii

$$-y - 1 \qquad y^2 - 2\,y + 1\,;$$

la prima equazione ausiliaria non ha radici positive, sicchè l'indice è formato da -1 per l'opposizione di segno degli ultimi termini, e da $+1$ per l'opposizione di segno dei primi termini (il proposto polinomio essendo di grado pari), e quindi l'indice 0 ci avverte che due radici sono comprese tra $a = 0$ ed $a = 1$, ed esse non sono reali come lo mostra il solito criterio

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 - 3 + 5 - 6 + 4 \\ \hline 1 & -1 - 0 - 3 + 2 - 4 \quad 0 \end{array}$$

Ponendo $a = 2$ si giunge ai polinomii ausiliarii

$$\begin{array}{r|l} & -5\,y + 10 \\ \hline 2 & -5 \quad + 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} & y^2 - 11\,y + \ \ 4 \\ \hline 2 & 1 - \ \ 9 \quad - 14 \end{array}$$

che danno l'indice 2, perciò altre due radici sono comprese tra $a = 1$ ed $a = 2$. Il modo di avvicinarsi a tali radici apparisce bastantemente da quanto si disse. Così se prendiamo $a = 1{,}5$ avremo i due polinomii

$$\begin{array}{r|r} & -2{,}2\,y + 0{,}578 \\ \hline 0{,}2 & -2{,}2 \quad +0{,}138 \\ 0{,}06 & ,006 \\ 0{,}003 & ,000 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|r} & y^2 - 3{,}44\ \ y + 0{,}9151 \\ \hline & +0{,}2797 \\ & +0{,}0891 \\ 0{,}263 & 1 - 3{,}177 \quad +0{,}0796 \end{array}$$

e quindi l'errore $+0,0796$. Invece $a=1,51$ dà

$$\begin{array}{l|lr}
 & \multicolumn{2}{r}{-2,24\,y+0,6474} \\ \hline
0,2 & -2,24 & +0,1994 \\
0,08 & & ,0202 \\
0,009 & & ,0001
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|llr}
 & \multicolumn{3}{r}{y^2-3,5066\,y+0,9212} \\ \hline
 & & & +\ ,2777 \\
 & & & +\ ,0203 \\
0,289 & 1 & -3,2176 & -0,0086
\end{array}$$

e perciò l'errore è $-0,086$, sicchè il valore approssimato da impiegarsi ulteriormente sarà $a=1,509$, ecc.

74. Esempio III. Serva per ultimo esempio l'equazione del quinto grado risolta al § 48. Per $a=0$ abbiamo i polinomii

$$\begin{array}{l|lll}
 & \multicolumn{3}{l}{y^2-105\quad y+70} \\ \hline
0,6 & 1 & -104,4 & +\ 7,36 \\ \hline
100 & 1 & -\ 5 & -430
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|lll}
 & \multicolumn{3}{l}{-18\,y^2+\ 206\,y-\ 8} \\ \hline
0,6 & -18 & +\ 195 & +\ 109 \\ \hline
100 & -18 & -1794 & -179408
\end{array}$$

le due radici positive della prima equazione ausiliaria ed il confronto coi valori che prende il secondo polinomio danno gl'indici -1, -1, e -1 è pur dato dall'opposizione di segno dei due ultimi termini, nè si curano i segni dei primi termini perchè l'equazione proposta è di grado dispari, così l'indice è -3. Per $a=10$ si hanno i polinomii

$$\begin{array}{l|lll}
 & \multicolumn{3}{l}{y^2-385\,y+\ 5450} \\ \hline
14 & 1 & -371 & +\ 256 \\ \hline
300 & 1 & -\ 85 & -20050
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|lll}
 & \multicolumn{3}{l}{32\,y^2-2144\,y+\ 5092} \\ \hline
14 & 32 & -1696 & -18652 \\ \hline
300 & 32 & +7456 & +\ldots
\end{array}$$

e l'opposizione di segno dei loro valori per y poco inferiore alle radici positive della prima equazione ausiliaria danno l'indice $+1+$ $+1=2$, perciò tutte le 5 radici sono comprese tra 0 e 10.

Se $a=0,2$ abbiamo (§ 48)

$$\begin{array}{l|lll}
 & \multicolumn{3}{l}{y^2-91\,y-0,368} \\ \hline
91 & 1 & -\ 0 & -0,368
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|lll}
 & \multicolumn{3}{l}{-17\,y^2+\ 147,24\,y-1,42848} \\ \hline
91 & -17 & -1400 & -\ldots
\end{array}$$

la sola radice positiva della prima equazione ausiliaria dà l'indice -1, dunque due radici sono comprese tra $a=0$ ed $a=0,2$.

Ponendo $a = 0,1$ si trovano i polinomii

	$y^2 - 97,90\,y + 31,8785$			$-17,5\,y^2 + 175,570\,y - 2,95679$
0,3	$1 - 97,6 \quad + 2,60$		0,3	$-17,5 \quad + 170,320 \quad + 48,14$
	$1 - 97,3$			$-17,5 \quad + 165,07$
0,03	$1 - 97,3 \quad - 0,32$		0,03	$-17,5 \quad + 164,54 \quad + 53,08$
97	$1 - 0,90 \quad - 55$		100	$-17,5 \quad - \ldots \quad - \ldots$

che danno l'indice -5, e l'errore corrispondente alla radice più piccola $b = 0,53$ della prima equazione ausiliaria è circa $+53$, mentre per $a = 0,2$, e per la radice poco inferiore a zero l'errore è circa -2, perciò il vero valore di a è molto prossimo a 2; porremo $a = 0,19$ e troveremo i polinomii ausiliarii

	$y^2 - 91,681\,y + 2,604$			$-17,05\,y^2 + 149,980\,y - 1,4396$
0,02	$1 - 91,661 \quad + 0,771$			$+ 149,639 \quad + 1,5505$
	$1 - 91,641$		0,028	$-17,05 \quad + 149,503 \quad + 2,7465$
0,008	$1 - 91,633 \quad + 0,038$			

che danno $b = 0,028$ e l'errore $+2,7$; così saremo condotti al valore $a = 0,195$ che dà $b = 0,0122$ e l'errore 0,58, poscia ad $a = 0,1958$ ecc. ecc.

§ IX.

Radici razionali delle equazioni numeriche

75. Per trovare tutte le radici intere di una equazione si suol prescrivere di determinare tutti i divisori degli ultimi termini della equazione proposta e delle sue trasformate in $(x - 1)$ ed in $(x + 1)$; è molto più speditivo attenersi ad uno dei metodi che ora esporremo.

76. Data un'equazione di un grado qualunque, che noi rappresenteremo col caso particolare $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, nella quale tutti i coefficienti $A \ldots E$ sieno numeri interi, se essa abbia una radice razionale $= n : d$ (dove n, d sono numeri tra di loro primi) il suo denominatore d dividerà esattamente A. Infatti posto $x = y : d$ avremo l'equazione $Ay^4 + Bdy^3 \ldots + Ed^4 = 0$, che dovrà esser sod-

disfatta da $y=n$, quindi fatto colla cifra n il solito calcolo

$$\begin{array}{r|l} & A+Bd+Cd^2+Dd^3+Ed^4 \\ \hline n & A+B_1\ +C_2\ \ +D_3\ \ +E_4 \end{array}$$

cioè

$$B_1=nA+Bd,\quad C_2=nB_1+Cd^2,\quad D_3=nC_2+Dd^3,\quad E_4=nD_3+Ed^4$$

dovrà essere $E_4=0$; ora se d non dividesse esattamente A esso (perchè primo con n) non potrebbe dividere esattamente nemmeno B_1, e quindi nemmeno C_2, ecc. nè potrebbe essere $E_4=0$.

77. Se adunque sieno trovate approssimatamente le radici della equazione $Ax^4 \ldots + E = 0$ basterà moltiplicarle per A, e se nessun prodotto riesca intero noi saremo certi che l'equazione non ammette radici razionali. Quando per altro si sospetti che l'equazione abbia delle radici razionali gioverà trasformarla nella $y^4+By^3+ACy^2+$ $+A^2Dy+A^3E=0$ essendo $y=Ax$, perchè in tal guisa le sue radici razionali che saranno anche intere (giacchè il coefficiente del primo termine è 1) si otterranno immediatamente senza bisogno di spingere l'approssimazione alle decimali.

78. Serva di esempio l'equazione

$$x^5-23x^4+160x^3-281x^2-257x-440=0$$

La necessità di cangiare il segno mediante i due termini positivi 1 +160 ai tre ultimi termini negativi può indurre a tentare la cifra piuttosto grande 6;

$$\begin{array}{r|l} & 1\ -\ 23\ +160\ -281\ -\ 257\ -\ 440 \\ (6) & (1)-(17)+\ (58)+(67)+(145)+(430) \\ \hline 5 & 1\ -\ 18\ +\ \ 70\ +\ \ 69\ +\ \ \ 88\ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

fatto il calcolo della prima riga, il cangiamento di segno dell'ultimo termine mi avverte di aver sorpassata una radice; torno adunque alla cifra 5, e annullandosi l'ultimo termine veggo che la proposta ha la radice 5, e veggo nello stesso tempo che il primo membro diviso per $x-5$ dà il quoziente $x^4-18x^3+70x^2+69x+88$. Continuando adunque i calcoli sui coefficienti già trovati, provo la cifra 7, e ve-

dendo ch'essa è troppo piccola preferisco cancellare la riga già scritta, anzichè compiere la tabella, e provando la cifra 8 trovo la nuova radice 8 ed il nuovo quoziente $x^3 - 10x^2 - 10x - 11$. È evidente che le radici di quest'ultima equazione sono maggiori di 10, nulladimeno non volendo calcolare le tabelle se non se con una cifra alla volta, adopero la cifra 10 e compio la tabella che mi dà i coefficienti $1 + 20 + 90 - 111$, poscia colla cifra 1 veggo che la proposta ha la radice $10 + 1 = 11$;

	1 — 18 + 70 + 69 + 88
(7)	(1) — (11) — (7) + (20) + (228)
8	1 — 10 — 10 — 11 0
10	1 + 0 — 10 — 111
	1 + 10 + 90
	1 + 20
1	1 + 21 + 111 0

	1 — 21 + 111
10	1 — 11 + 1
	1 — 1
1	1 + 0 + 1

in quanto al quoziente $y^2 + 21y + 111$ bisogna notare che essendo partiti dagli ultimi coefficienti della tabella calcolata colla cifra 10 abbiamo la trasformata in $y = x - 10$. L'ultima equazione $y^2 + 21y + 111$ manca di variazioni di segno, e quindi non può avere radici positive; per vedere se ne abbia di negative cangiamola nella $u^2 - 21u + 111 = 0$, e fatto il calcolo colla cifra 10 avremo la trasformata $v^2 - v + 1$, dalla quale colla cifra 1 si fanno sparire le due variazioni di segno, ed il solito criterio mostra (cosa d'altronde evidentissima) che non si hanno altre radici reali oltre le già trovate 5, 8, 11.

	1 — 1 + 1
1	— 1 — 0 — 1 0

79. Operando nel modo predetto se le radici non fossero intere si sarebbe sulla strada per trovarle approssimatamente, è per tal ragione che quel metodo lo credo preferibile al seguente; pure se ci

fossimo proposti di trovare le radici intere senza curarci delle altre avremmo potuto limitarci a calcolare le sole prime righe delle solite tabelle come qui si vede

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -23 & +160 & -281 & -257 & -440 \\
\hline
1 & 1 & -22 & +138 & -143 & -400 & -840 \\
2 & 1 & -21 & +118 & -45 & -347 & -1134 \\
4 & 1 & -19 & +84 & +55 & -37 & -588 \\
5 & 1 & -18 & +70 & +69 & +88 & 0 \\
\hline
8 & 1 & -10 & -10 & -11 & 0 & \\
\hline
11 & 1 & +1 & +1 & 0 & &
\end{array}
$$

dove, sempre partendo dai dati coefficienti **1 — 23 + 160 — 281 — — 257 — 440**, si sono calcolate le prime righe corrispondenti rispettivamente alle cifre **1**, **2**, **4**, 5. Per vero dire si avrebbe dovuto risparmiare di calcolare le righe corrispondenti alle cifre **1**, **2**, **4**, essendo palese che esse erano troppo piccole per soddisfare all'equazione, ma non si volle profittare di questa conoscenza. Non si fece poi il calcolo colla cifra **3**, giacchè, per la maniera stessa con cui procede il calcolo, si riconosce che l'ultimo termine non può annullarsi se non se mediante un suo divisore, ed il **3** non divide esattamente il **440**. Si fece il tentativo colla cifra **4**, perchè essa è un divisore del **440**, e perchè, diminuita di **1** e di **2**, i residui **3** e **2** dividono esattamente i numeri **840** e **1134**, che sono gli ultimi termini delle trasformate in $(x-1)$ ed in $(x-2)$. Similmente, prima di tentare la cifra 5, si è osservato non solo se essa divide esattamente il **440**, ma anche se 5 — **1**, 5 — **2**, 5 — **4** dividono rispettivamente gli ultimi termini già trovati 840, **1134**, 588. Trovata la radice 5 si procede sui coefficienti già ottenuti **1 — 18 + 70 + 69 + 88**; non si tenta alcuna radice minore di 5, poichè se essa vi fosse stata la si sarebbe già trovata; non si tenta nè il 5, nè il **6**, nè il **7** perchè non sono divisori dell'88, e tentato l'8 (giacchè **8** è divisore di **88**, e **8 — 1**, 8 — **2**, 8 — **4** lo sono di **840**, **1134**, 588) si trova che esso pure è una radice della proposta equazione. Continuando il calcolo sui coefficienti **1 — 10 — 10 — 1** così ottenuti non si può tentare alcun numero minore dell'8, e si è così necessariamente condotti a tentare

l' **11** che è il solo divisore dell'ultimo termine e che offre una nuova radice. La rimanente equazione x^2+x+1 non può certamente avere radici maggiori od uguali di **11**, ed è pur certo che non ne ha di negative, perchè non ne può avere la proposta, dalla quale essa fu dedotta mediante sole divisioni; d'altronde sarebbe facilissimo assicurarsi che essa non ammette la radice -1, che è la sola intera che potesse avere. Perciò la proposta equazione non ammette altre radici intere oltre le trovate **5**, **8**, **11**.

80. Serva di secondo esempio l'equazione

$$x^4-28x^3+30x^2-103x+360=0.$$

Fatti i soliti tentativi colle cifre **1**, **2**, **3**, che sono divisori del **360**, non si tenta il **4** perchè **4 — 1** non è divisore del **260**: dopo tentato inutilmente il **5** si osserva che a motivo dei pochi divisori del **66** non rimarrebbero da tentare se non se le cifre **8**, **13**, **24**, **35**, **68**, le quali d'altronde si escludono perchè **8 — 1**, **13 — 1** non sono divisori di **260**, e **24 — 3**, **35 — 3**, **68 — 3** non lo sono di **354**.

	$1-28+30-103+360$
1	$1-27+3-100+260$
2	$1-26-22-147+66$
3	$1-25-45-238-354$
5	$1-23-85-528-2280$

Dunque non vi è alcuna radice intera positiva, ed è poi evidente che non ve ne è alcuna di negativa, perchè la proposta equazione cangiando x in $-x$ perde tutte le sue variazioni di segno.

81. Quando i coefficienti dell'equazione proposta sono molto grandi, anche il precedente metodo riesce laboriosissimo. Se non si voglia attenersi al metodo generale indicato nel § 78, si potrà determinare le cercate radici intere, cominciando dalla cifra delle unità e procedendo alle decine, centinaia, ecc. nel modo che si renderà palese dal seguente esempio, e che può utilmente adoperarsi anche per riconoscere se un numero molto grande sia divisibile per un dato numero dispari. Proposta l'equazione

$$x^2-3268x+1049427=0,$$

che ha sole radici positive, ponendo mente alle ultime cifre dei suoi termini, è facile riconoscere che se x ammette un valor intero, la cifra delle sue unità sarà o **1** o **7**. Si cominci per esempio col tentare l'**1**, ed a tal fine si calcolino nel modo solito i coefficienti della trasformata in $(x - 1)$, poscia considerando le ultime cifre significative dei termini $-3266 + 1046160$ si vedrà che $x - 1$ deve contenere o **10** o **60**.

	1 − 3268 + 1049427		
1	1 − 3267 + 1046160		
	1 − 3266		1 − 3266 + 1046160
10	1 − 3256 + 1013600	60	1 − 3206 + 853800
	1 − 3246		1 − 3146
100	1 − 3146 + 699000	800	1 − 2346 − 1023000
	1 − 3046		1 − 1546
500	1 − 2546 − 574000		impossibile
	1 − 2046		
1000	1 − 1046 − 1620000	300	1 − 2846 − 00000
	1 − 46		

Col **10** si calcola la trasformata in $(x - 11)$, i cui ultimi termini $-3246 + 1013600$ mostrano che $x - 11$ deve contenere o **100** o **600**. La trasformata in $(x - 111)$ non può avere una radice di sole migliaia, perchè il **6** non può dare colla moltiplica un numero che termini col **9**: bensì potremo tentare il **500**, il che è lo stesso come se a bella prima si fosse adoperato il **600** anzichè il **100**. Gli ultimi termini della trasformata in $(x - 611)$ mostrano che rimangono da tentare il **1000** ed il **6000**; il **6000** farebbe sparire tutte le variazioni di segno e quindi sarebbe troppo grande; il **1000** può tentarsi, ma condurrebbe poscia a tentare **30000** e **80000** che sono troppo grandi; quindi x non ammette un valore le cui ultime cifre sieno **11**. Riprendendo ora il calcolo col **60** troveremo la trasformata in $(x - 61)$, i cui ultimi termini $-3146 + 853800$ mostrano che deggiono tentarsi **300** e **800**. L'**800** conduce ai due ultimi termini -1546 -1023000, i quali mostrano l'impossibilità di procedere alle migliaia, perchè nessun multiplo di **6** sommato con **5** può dare l'ultima cifra **0**. Invece il **300** dà la desiderata radice $x = 361$.

L'altra radice si troverebbe partendo dalla cifra **7**, che abbiamo veduto poter appartenere alla x. Considerando i termini $-3254+$ $+1026600$ della trasformata in $(x-7)$ si scorge che $x-7$ deve contenere o **50** o **400** o **900**.

$$
\begin{array}{r|llll}
\multicolumn{1}{r}{} & 1 & -3268 & +1049427 \\
\hline
7 & 1 & -3261 & +1026600 \\
 & 1 & -3254 & \\
\hline
50 & 1 & -3204 & +\;\;866400 \\
 & 1 & -3154 & \\
\hline
100 & 1 & -3054 & +\;\;561000 \\
 & 1 & -2954 & \\
\hline
500 & 1 & -2454 & -\;\;666000 \\
 & 1 & -1954 & \\
\hline
1000 & 1 & -\;\;954 & -1620000 \\
 & 1 & +\;\;\;46 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|lll}
\multicolumn{1}{r}{} & 1 & -3254 & +1026600 \\
\hline
400 & 1 & -2854 & -\;\;115000 \\
 & 1 & -2454 & \\
\hline
500 & 1 & -1954 & -1092000 \\
 & 1 & -1454 & \\
\hline
2000 & 1 & +\;\;546 & \;\;\;000000
\end{array}
$$

La trasformata in $(x-57)$ mostra che si deggiono tentare **100** e **600**: dopo della trasformata in $(x-157)$ non si può evidentemente passare alle migliaia; bensì lo si potrebbe dopo quella in $(x-657)$, ma il **1000** non soddisfa all'equazione ed il **6000** è troppo grande. Passando alla trasformata in $(x-407)$ si vede che non si può procedere alle migliaia. Invece considerando i valori ed i segni degli ultimi termini $-1454-1092000$ della trasformata in $(x-907)$, si riconosce che le migliaia possono essere o **2** o **7**; il **2000** soddisfa all'equazione e dà la radice **2907**.

§ X.

Fattori razionali dei polinomii

82. I fattori razionali del primo grado, cioè della forma $x-a$ si desumono immediatamente dalle radici razionali dell'equazione, che si ottiene uguagliando a zero il proposto polinomio; dopo essersi assicurati che non esiste alcuno di tali fattori, si potrà ricercare se vi sia qualche fattore del secondo grado $x^2-\alpha x+\beta$ essendo α β numeri razionali. Per verificare se il polinomio $Ax^6+Bx^5 \dots +G$ sia

divisibile per $x^2-\alpha x+\beta$, e per ottenere il quoziente di tal divisione si potrà fare un calcolo analogo a quello con cui sogliamo dividere per $x-a$, e di cui qui si vede il tipo

$$\begin{array}{r|ccccccc} & A+ & B+ & C+ & D+ & E+ & F+ & G \\ -\beta & & & -\beta A & -\beta B_1 & -\beta C_2 & -\beta D_3 & -\beta E_4 \\ \alpha & & +\alpha A & +\alpha B_1 & +\alpha C_2 & +\alpha D_3 & +\alpha E_4 & \\ \hline & A+ & B_1+ & C_2+ & D_3+ & E_4 & 0 & 0 \end{array}$$

Le due cifre α, $-\beta$ sono quelle per le quali si moltiplica ciascuno dei coefficienti A B_1 C_2 D_3 E_4 che si vanno trovando e che sono le somme di quelli posti di sopra in ogni singola colonna, cioè

$$B_1=B+\alpha A\,,\qquad C_2=C-\beta A+\alpha B\,,\ \text{ecc.},$$

così il quoziente è

$$A x^4+B_1 x^3+C_2 x^2+D_3 x+E_4\,,$$

e le condizioni perchè la divisione sia esatta, consistono nelle

$$F-\beta D_3+\alpha E_4=0\,,\qquad G-\beta E_4=0\,;$$

altrimenti sarebbe

$$(F-\beta D_3+\alpha E_4)x+(G-\beta E_4)$$

il residuo.

83. Se il polinomio abbia i coefficienti razionali si potrà sempre mediante la sostituzione $x=y:\delta$ fare in guisa che $Ay^6:\delta^6+\ldots.+G$ moltiplicato per $\delta^6:A$ abbia tutti i coefficienti interi, poscia cercarne i fattori della forma $x^2-\alpha x+\beta$, essendo α β numeri interi positivi o negativi. Si noti che l'assunto polinomio x^6+ ecc. non potrebbe avere alcun fattore $x^2-\alpha x+\beta$ coi coefficienti α β razionali frazionarii; infatti se ciò fosse possibile, ponendo $x=y:\delta$ anche il polinomio $y^6+B\delta y^5\ldots.+G\delta^6$ sarebbe divisibile pel trinomio $y^2-\alpha\delta y+$ $+\beta\delta^2$, e ciò qualunque fosse il numero intero δ; ora si può sempre scegliere δ in modo che abbia luogo uno dei tre casi: 1.° $\alpha\delta$ intero e $\beta\delta^2$ frazionario col denominatore contenente il numero primo η; 2.° $\beta\delta^2$ intero e $\alpha\delta$ col denominatore contenente il numero primo η; 3.° $\alpha\delta$ col denominatore η, e $\beta\delta$ col denominatore η^2; e si dimostra,

come segue, che ognuno di questi casi è impossibile. **1.**° Se il polinomio a coefficienti interi $x^6 + B x^5 \dots + G$ ammettesse il fattore

$$x^2 - \alpha x + \frac{\beta}{\eta}$$

essendo α intero e $\beta : \eta$ una frazione ridotta ai minimi termini, segnato con

$$x^4 + B_1 x^3 + C_2 x^2 + D_3 x + E_4$$

l'altro fattore a coefficienti razionali, le equazioni

$$G - \frac{\beta}{\eta} E_4 = 0, \quad F - \frac{\beta}{\eta} D_3 + \alpha E_4 = 0, \quad E - \frac{\beta}{\eta} C_2 + \alpha D_3 = E_4, \quad D - \frac{\beta}{\eta} B_1 + \alpha C_2 = D_3$$

mostrerebbero che E_4 D_3 C_2 B_1 debbono esser interi, e che perciò non potrebbe verificarsi la

$$C - \frac{\beta}{\eta} + \alpha B_1 = C_2 .$$

2.° Se il fattore fosse

$$x^2 - \frac{\alpha}{\eta} x + \beta$$

le equazioni

$$F - \beta D_3 + \frac{\alpha}{\eta} E_4 = 0, \qquad \dots \qquad C - \beta + \frac{\alpha}{\eta} B_1 = C_2$$

darebbero $E_4 \dots B_1$ interi, e sarebbe impossibile la

$$B + \frac{\alpha}{\eta} = B_1 .$$

3.° Se il fattore fosse

$$x^2 - \frac{\alpha}{\eta} x + \frac{\beta}{\eta\eta}$$

le equazioni

$$G - \frac{\beta}{\eta\eta} E_4 = 0, \quad F - \frac{\beta}{\eta\eta} D_3 + \frac{\alpha}{\eta} E_4 = 0, \quad \dots \quad D - \frac{\beta}{\eta\eta} B_1 + \frac{\alpha}{\eta} C_2 = D_3$$

mostrerebbero che $E_4 \dots B_1$ deggiono essere interi e multipli di $\eta\eta$, e perciò sarebbero impossibili le

$$C - \frac{\beta}{\eta\eta} + \frac{\alpha}{\eta} B_1 = C_2, \quad B + \frac{\alpha}{\eta} = B_1 .$$

Viene da ciò che la ricerca dei fattori a coefficienti razionali del polinomio $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots$ riducesi alla ricerca dei fattori a coefficienti interi di un altro polinomio, che ha il primo coefficiente eguale all'unità e gli altri interi. Il modo che in pratica riuscirà più comodo per quest'ultima ricerca consisterà nel trovare tutte le radici dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero il dato polinomio, poscia cercare se tali radici si possano combinare insieme in guisa che e la loro somma e il loro prodotto sieno numeri interi. Perciò quantunque a compimento della risoluzione delle equazioni numeriche io qui esponga due metodi per trovare i fattori razionali del secondo grado, pure riconosco che tale ricerca era opportuna soltanto quando si considerava come un'operazione difficile la determinazione di tutte le radici di un'equazione.

84. Si potrebbe ritenere pel fattore del secondo grado la forma $x^2 - \alpha x + \beta$, essendo α β numeri interi; ma per meglio accordarmi col metodo esposto nel § VIII preferisco la forma $(x-a)^2 + b$, essendo a b numeri positivi o negativi. Per esser certi che essi sieno interi bisognerà che nel polinomio $x^n + Bx^{n-1} +$ ecc. B sia divisibile per 2, C per 4, D per 8, ecc.; se non lo fossero si ridurranno tali passando dal proposto polinomio in x a quello in $2x$. Il polinomio in $(x-a)$ dà (§ 66) i due polinomii ausiliarii, che deggiono ambedue svanire quando vi si pone $y = b$. Sarà facile vedere se ciò sia possibile, e nel caso contrario avremo escluso il valore assunto per a. Pei fattori corrispondenti a b positivo, il metodo degli indici (§ 68) insegna a ristringere sempre più gli intervalli, nei quali deggiono cercarsi i valori della a; ma quel metodo non indicherebbe dove si trovino i fattori corrispondenti a b negativo, e potrebbe tornar necessario di tentare un numero troppo grande di valori di a: le seguenti considerazioni serviranno ad escludere la massima parte dei tentativi inutili.

85. Risulta evidentemente dal calcolo del § 82 che $\beta = a^2 + b$ è un divisore dell'ultimo termine del proposto polinomio; per la stessa ragione siccome il polinomio in $(x-i)$ avrà il fattore

$$(x-i)^2 - 2(a-i)(x-i) + (a-i)^2 + b,$$

così il suo ultimo termine sarà divisibile per $i^2 - 2ai + a^2 + b$: noi perciò calcoleremo parecchi polinomii trasformati in $(x - i)$, e sceglieremo quelli i cui ultimi termini hanno pochi divisori; poscia cercheremo quali valori interi positivi o negativi di a e di b rendano ciascun ultimo termine divisibile pel corrispondente $i^2 - 2ai + a^2 + b$. Giova osservare che per l'assunta ipotesi (§ 84) intorno ai coefficienti B, C, ... anche il polinomio in $x:2$ avrebbe i coefficienti interi, e siccome esso avrebbe il fattore

$$\frac{x^2}{4} - a\frac{x}{2} + \frac{a^2+b}{4},$$

così $a^2 + b$ dev'essere divisibile per 4.

86. Esempio I. Sia proposto il polinomio

$$x^4 - 9x^3 + 33x^2 - 69x + 56$$

Mutando x in $z:2$ lo trasformo nell'altro

$$z^4 - 18z^3 + 132z^2 - 552z + 896$$

e trovo gli ultimi termini dei suoi trasformati in

$$(z-1),\quad (z-2),\quad (z-3),\quad (z-4):$$

$$\begin{array}{c|l}
 & 1 - 18 + 132 - 552 + 896 \\
\hline
1 & 1 - 17 + 115 - 437 + 459 \\
2 & 1 - 16 + 100 - 352 + 192 \\
3 & 1 - 15 + 87 - 291 + 23 \\
4 & 1 - 14 + 76 - 248 - 96
\end{array}$$

sicchè

$$896 = 7.2^7,\quad 459 = 3^3.17,\quad 192 = 3.2^6,\quad 23,\quad 96 = 3.2^5$$

dovranno essere rispettivamente divisibili per

$$a^2 + b,\quad 1 - 2a + a^2 + b,\quad 4 - 4a + a^2 + b,\quad 9 - 6a + a^2 + b,\quad 16 - 8a + a^2 + b;$$

risulta da ciò che i divisori di tali numeri deggiono distribuirsi in serie tali che le differenze fra i termini successivi formino la progressione dei numeri dispari

$$\ldots. -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7$$

Si noti che i termini in posto pari deggiono essere tutti divisibili per 4,

dal che ne viene che quelli in posto dispari se vengano divisi per 8 devono dare o tutti il residuo 1, o tutti il residuo 5, o alternativamente i residui 3 e 7. Per formare tutte queste serie gioverà scegliere gli ultimi termini 459 e 23 che hanno il minor numero di divisori, e tutti questi divisori presi tanto positivamente quanto negativamente si combineranno a due a due, scegliendoli in guisa che soddisfacciano alla predetta condizione; poscia si determinerà il numero intermedio (che dev'essere multiplo di 4) e sarà facile continuare la serie: si dovran poi cancellare in ogni serie quei numeri che non divideranno esattamente gli ultimi termini 896, 192, ecc. ed escludere per conseguenza la serie relativa. Così per esempio i due divisori 1, 1 danno il divisore intermedio zero, e tutta la serie è formata da

$$\ldots . 4,\ 1,\ 0,\ 1,\ 4 \ldots .$$

colle differenze

$$\ldots . -3,\ -1,\ 1,\ 3 \ldots .$$

la qual serie deve escludersi perchè 0 non è divisore di 192; similmente i divisori 9 -23 danno l'intermedio -8 e formano la serie

$$\ldots . 28,\ 9,\ -8,\ -23,\ -36 \ldots .$$

colle differenze

$$-19,\ -17,\ -15,\ -13 \ldots .$$

che deve escludersi perchè 36 non è divisore di 96, ecc. ecc.

896	459	192	23	96
4	1	(0)	1	4
16	1	−12	−23	−32
16	9	4	1	(0)
28	9	−8	−23	−(36)
28	17	8	1	−4
(40)	17	−4	−23	
	153	(76)	1	
(244)	153	64	−23	
−4	3	12	23	(36)
	3	(0)	−1	
32	27	24	23	24
(44)	27	12	−1	
	51	(36)	23	
(80)	51	24	−1	
	459	(240)	23	
	459	(228)	−1	

Rimangono non escluse le tre sole serie

$$16 \quad 1 \quad -12 \quad -23 \quad -32\,; \qquad 28 \quad 17 \quad 8 \quad 1 \quad -4\,; \qquad 32 \quad 27 \quad 24 \quad 23 \quad 24\,;$$

la prima dà

$$a^2+b=16\,, \qquad 1-a+a^2+b=1\,,$$

onde

$$a=8\,, \qquad b=-48\,;$$

la seconda dà

$$a^2+b=28\,, \qquad a=6\,, \qquad b=-8\,,$$

e la terza

$$a^2+b=32\,, \qquad a=3\,, \qquad b=23\,.$$

Per conoscere se alcuno dei

$$x^2-ax+\frac{a^2+b}{4}=x^2-8x+4\,, \qquad =x^2-6x+7\,, \qquad =x^2-3x+8$$

sia veramente un fattore del proposto polinomio, rimarrà da eseguire la divisione, il che potrà farsi coll'algoritmo dato al § 82, come si vede qui eseguito relativamente al fattore x^2-6x+7, che dà il residuo zero e per quoziente l'altro fattore x^2-5x+8.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -9 & +33 & -69 & +56 \\
-7 & & & -7 & +21 & -56 \\
6 & & +6 & -18 & +48 & \\
\hline
 & 1 & -3 & +8 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -9 & +33 & -69 & +56 \\
-4 & & & -4 & +4 & -84 \\
8 & & +8 & -8 & +168 & \\
\hline
 & 1 & -1 & +21 & +103 & -38
\end{array}$$

Se invece si tentasse la divisione coll'altro trinomio x^2-8x+4, si otterrebbe il residuo $105x-38$. Si riconosce anche più speditamente che x^2-8x+4 non è un fattore del proposto polinomio, eseguendo il calcolo da destra verso sinistra, ed arrestandosi quando si dovrebbe

scrivere un numero frazionario.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -9 & +33 & -69 & +56 \\ -4 & & & & -43 & -56 \\ 8 & & & +86 & +112 & \\ \hline & & +\frac{43}{4} & +14 & 0 & 0 \end{array}$$

Vale a dire lo zero dell'ultima colonna porta di necessità il -56, quindi $+14$ nella colonna antipenultima e $+112$ nella penultima, in cui a motivo della somma zero deve pure scriversi il -43, dal quale risulta il $+43:4$, che essendo frazionario mostra l'inutilità di proseguire il calcolo.

87. Del resto pei polinomii del quarto grado si conosce un metodo diretto per decomporli in fattori del secondo grado; noi lo riportiamo perchè in esso sta forse tutto ciò che praticamente giova sapere intorno all'algebraica risoluzione delle equazioni di grado non superiore al quarto. Il polinomio

$$x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E$$

può sempre ridursi alla forma

$$(x^2 + \frac{B}{2} x + 2 v)^2 - \left\{(4 v + \frac{B^2}{4} - C) x^2 + (2 B v - D) x + (4 v^2 - E)\right\}$$

e se si determinerà l'incognita v in guisa che

$$(4 v^2 - E)(16 v + B^2 - 4 C) = (2 B v - D)^2$$

il polinomio compreso tra le $\{\ \}$ sarà un quadrato perfetto, e quindi il polinomio proposto sarà ridotto a

$$P^2 - Q^2 = (P + Q)(P - Q):$$

ora l'equazione

$$64 v^3 - 16 C v^2 + (4 B D - 16 E) v - B^2 E + 4 C E - D^2 = 0$$

ammette sempre almeno una radice reale col cui mezzo si effettua la desiderata decomposizione. Così nel presente esempio avremo

$$z^4 - 18 z^3 + 132 z^2 - 552 z + 896 = (z^2 - 9 z + 2 v)^2 - \{(4 v - 51) z^2 +$$
$$+ (-36 v + 552) z + 4 v^2 - 896\}$$

e dovremo fare

$$(v^2-224)\,(4\,v-51)=(9\,v-138)^2$$

cioè

$$v^3-33\,v^2+397\,v-1905=0\,.$$

Di questa equazione noi cercheremo una radice intera, giacchè le irrazionali non potrebbero dare alcun fattore razionale del polinomio proposto: basta la semplice ispezione dei coefficienti per assicurarsi che l'equazione non può avere radici piccole; sicchè piuttosto di fare i calcoli colle cifre 1, 2, 3, ecc. sarà meglio trovare l'equazione trasformata in $(v-10)$, giacchè così ci avvicineremo alla cercata radice, e diminuiremo l'ultimo termine e probabilmente anche il numero dei suoi divisori e dei tentativi da farsi: tenteremo poscia inutilmente la cifra 1, escluderemo le 2, 3, 4 perchè non dividono il 235, e la cifra 5 ci darà la cercata radice $v=15$,

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & -33 & +397 & -1905 \\ \hline
10 & 1 & -23 & +167 & -\;\;235 \\
 & 1 & -13 & +\;\;37 & \\
 & 1 & -\;\;3 & & \\ \hline
1 & 1 & -\;\;2 & +\;\;35 & -\;\;200 \\
5 & 1 & +\;\;2 & +\;\;47 & \;\;\;\;\;0
\end{array}$$

sicchè il polinomio si decomporrà nei due fattori

$$(z^2-9\,z+30)\pm(3\,z+2)\,.$$

88. Esempio II. Sia proposto il polinomio del § 70 il quale cangiato x in $z:2$ diventa

$$z^6-16\,z^5+108\,z^4-416\,z^3+1104\,z^2-1984\,z+1792\,.$$

Il suo ultimo termine e quelli dei suoi trasformati in

$$(z-1)\quad(z-2)\quad(z-3)\quad(z-4)$$

sono

$$1792=2^8.7,\;\;589=19.31\,,\;\;192=2^6.3\,,\;\;133\;=7.19\,,\;\;256=2^8,\;\;597=3.199;$$

coi loro divisori si dovranno formare delle serie che abbiano per dif-

ferenze i termini della progressione .... — 3, — 1, 1, 3, 5, ... A tal fine combineremo fra di loro i divisori dei numeri **589, 133** coll'avvertenza che se uno di essi diviso per 8 dà il residuo + 1 oppur + 5, lo stesso dev'essere anche dell'altro; che se invece uno dà il residuo + 3, l'altro deve dare il residuo + 7. Da queste serie si escludono quelle che comprendono qualche numero che non è divisore dei trovati **1792, 192,** ecc., come si vede nel seguente prospetto:

1792	589	192	133	256	597
	1	(0)	1		
	1	— 4	— 7	— 8	(— 7)
	— 31	— 16	1	(20)	
	— 31	(— 20)	— 7		
28	19	12	7	4	3
	19	8	— 1	— 8	(— 13)
	— 589	(— 292)	7		
	— 589	(— 296)	— 1		
	589	(360)	133		
	589	(284)	— 19		
	— 19	(56)	133		
	— 19	(— 20)	— 19		
	31	24	19	16	(15)
	31	(— 52)	— 133		
	— 1	8	19	32	(47)
	— 1	(— 68)	— 133		

sicchè rimarrà la sola progressione

$$28 \quad 19 \quad 12 \quad 7 \quad 4 \quad 3\,,$$

la quale dà

$$a^2 + b = 28\,, \quad 1 - 2a + a^2 + b = 19$$

cioè

$$a = 5\,, \quad b = 3\,;$$

quindi resta da tentare se il proposto polinomio abbia veramente il fattore

$$x^2 - ax + \frac{a^2 + b}{4} = x^2 - 5x + 7$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 - 8 + 27 - 52 + 69 - 62 + 28 \\
-7 & \quad\;\; - 7 + 21 - 35 + 42 - 28 \\
5 & \quad + 5 - 15 + 25 - 30 + 20 \\ \hline
 & 1 - 3 + \;5 - \;6 + \;4 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Si trova che ciò ha luogo e si ottiene l'altro fattore

$$x^4-3x^3+5x^2-6x+4\,.$$

89. Quest'ultimo polinomio non può ammettere altri fattori razionali, ed infatti se lo scriviamo sotto la forma

$$\left(x^3-\frac{3}{2}x+\frac{u}{2}\right)^2-\left\{\left(u-\frac{11}{4}\right)x^2+\left(-\frac{3}{2}u+6\right)x+\frac{u^2}{4}-4\right\}$$

dovremo fare

$$(u^2-16)\,(4u-11)=(3u-12)^2\,,$$

cioè

$$u^3-5u^2+2u+8=0\,;$$

quest'equazione ha le radici intere 2, 4, — 1:

$$\begin{array}{r|l}
 & 1-5+2+8 \\
\hline
1 & 1-4-2+6 \\
2 & 1-3-4\quad 0 \\
\hline
2 & 1-1-2 \\
4 & 1+1\quad 0 \\
\hline
-1 & 1\quad 0
\end{array}$$

la sola che renda positivo il coefficiente $(u-11:4)$ di x^2 è la 4, ed essa dà al polinomio la forma

$$\left(x^2-\frac{3}{2}x+2\right)^2-\frac{5}{4}x^2\,,$$

la quale mostra che esso si decompone nei due fattori a coefficienti irrazionali

$$x^2-\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}x+2\,.$$

90. Per riconoscere direttamente se un dato polinomio, per esempio quello dei §§ 70, 88

$$x^6-8x^5+27x^4-52x^3+69x^2-62x+28$$

ammetta un fattore razionale $x^2-\alpha x+\beta$, essendo β un dato divisore dell'ultimo termine 28, si opererà come segue. (Pel caso che

invece fosse dato α veggasi il § 84). Col dato valore di $-\beta$, per esempio con $-\beta = 2$ e coi coefficienti del dato polinomio si calcoli la seguente tabella

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 - 8 + 27 - \;\; 52 + \;\; 69 - \;\; 62 + \;\; 28 \\
\hline
2 & 1 - 8 + 29 - \;\; 68 + 127 - 198 + 282 \\
 & 1 - 8 + 31 - \;\; 84 + 189 - 366 \\
 & 1 - 8 + 33 - 100 + 255 \\
 & 1 - 8 + 35 - 116 \\
 & 1 - 8 + 37 \\
 & 1 - 8 \\
 & 1
\end{array}$$

la quale è essenzialmente differente da quelle di cui finora si è parlato, poichè ogni numero è uguale a quello che gli sta immediatamente di sopra sommato col prodotto della cifra 2 per il penultimo sulla propria riga, così

$$-100 = -84 - 2 \,.\, 8\,, \quad 255 = 189 + 2 \,.\, 33\,, \text{ ecc.}$$

dopo ciò il valore di α dovrà soddisfare alle due equazioni

$$\alpha^6 - 8\alpha^5 + 37\alpha^4 - 116\alpha^3 + 255\alpha^2 - 366\alpha + 282 = 0$$

$$\alpha^5 - 8\alpha^4 + 35\alpha^3 - 100\alpha^2 + 189\alpha - 198 = 0$$

i cui coefficienti sono gli ultimi ed i penultimi numeri della precedente tabella. Moltiplicando la seconda per α, sottraendo dalla prima, e dividendo per la cifra 2 se ne deduce

$$\alpha^4 - 8\alpha^3 + 33\alpha^2 - 84\alpha + 141 = 0$$

poscia ancora si trova

$$\alpha^3 - 8\alpha^2 + 24\alpha - 99 = 0$$

ed ancora

$$9\alpha^2 + 15\alpha + 141 = 0$$

Limitandosi alla ricerca delle radici intere è palese che queste equazioni non hanno alcuna radice comune, e perciò il proposto polinomio non ha alcun fattore della forma $x^2 - \alpha x - 2$.

Se per secondo esempio si cerchino i fattori della forma $x^2 - \alpha x + 7$ si opererà colla cifra $-\beta = -7$, e compiuta la tabella

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 - 8 + 27 - 52 + 69 - 62 + 28 \\ \hline
-7 & 1 - 8 + 20 + 4 - 71 - 90 + 525 \\
 & 1 - 8 + 13 + 60 - 162 - 510 \\
 & 1 - 8 + 6 + 116 - 204 \\
 & 1 - 8 - 1 + 172 \\
 & 1 - 8 - 8 \\
 & 1 - 8 \\
 & 1
\end{array}$$

si avranno le due equazioni

$$\alpha^6 - 8\alpha^5 - 8\alpha^4 + 172\alpha^3 - 204\alpha^2 - 510\alpha + 525 = 0$$

$$\alpha^5 - 8\alpha^4 - \alpha^3 + 116\alpha^2 - 162\alpha - 90 = 0$$

dalle quali si ricavano successivamente le

$$\alpha^4 - 8\alpha^3 + 6\alpha^2 + 60\alpha - 75 = 0$$

$$7\alpha^3 - 56\alpha^2 + 87\alpha + 90 = 0$$

$$45\alpha^2 - 330\alpha + 525 = 0$$

Le radici intere comuni alle due ultime deggiono dividere esattamente tanto 90 quanto $525 : 15 = 35$; perciò rimangono da tentare i soli numeri 1 e 5

$$\begin{array}{r|l}
 & 7 - 56 + 87 + 90 \\ \hline
 & \\
5 & 7 - 21 - 18 \quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 3 - 22 + 35 \\ \hline
1 & 3 - 19 + 16 \\
5 & 3 - 7 \quad 0
\end{array}$$

Il secondo soddisfa ad ambedue le equazioni, quindi si ha il fattore $x^2 - 5x + 7$.

§ XI.

Decomposizione delle formule frazionarie

91. È una questione che dipende dalla risoluzione delle equazioni, e che con questa naturalmente si collega la decomposizione delle funzioni algebraiche frazionarie; sembrami che il metodo più comodo sia quello fondato sopra i principii affatto elementari che ora esporrò come un'altra applicazione della disposizione di calcolo adoperata in questa Memoria. Proposta la formula $N:D$, dove N e D sono polinomii della forma $Ax^r + Bx^{r-1} +$ ec. (suppongo che il grado del numeratore N sia inferiore a quello del denominatore D, però i calcoli seguenti varrebbero anche nel caso opposto) ed avendo decomposto il denominatore D nei due fattori reali F D_1 mi propongo da prima di eseguire la decomposizione

$$\frac{N}{D} = \frac{A}{F} + \frac{N_1}{D_1};$$

a tal fine io pongo

$$(1)\ D = FD_1, \qquad (2)\ D_1 = Fd_1 + \delta_1, \qquad (3)\ N = Fn + \nu$$

dove D_1 d_1 δ_1 n ν saranno nuovi polinomii interi dei quali δ_1 ν, che sono i residui della divisione di D e di N per F, saranno di grado inferiore ad F; fatte le sostituzioni nella

$$N = AD_1 + FN_1$$

avremo

$$Fn + \nu = AFd_1 + A\delta_1 + FN_1$$

perciò se δ_1 non sia nullo, posto $A = \nu : \delta_1$ avremo

$$(4)\ n - \frac{\nu d_1}{\delta_1} = N_1 \qquad (a)\ \frac{N}{D} = \frac{\nu}{\delta_1 F} + \frac{N_1}{D_1}.$$

Che se δ_1 sia nullo, cioè se D_1 sia divisibile per F, in luogo delle precedenti equazioni stabiliremo le

$$\text{(I)}\quad D = F D_1 = F^2 D_2 \ldots = F^i D_i$$

essendo D_i un polinomio non più divisibile per **F**,

$$\text{(II)}\quad D_i = F d_i + \delta_i \qquad \text{(III)}\quad N = F n + \nu$$

e l'equazione

$$F n + \nu = A F d_i + A \delta_i + F N_1$$

resterà soddisfatta ponendo

$$A = \frac{\nu}{\delta_i}$$

e

$$\text{(IV)}\quad n - \frac{\nu\,\delta_i}{\delta_i} = N_1$$

dopo di che sarà

$$\text{(A)}\quad \frac{N}{D} = \frac{\nu}{\delta_i F^i} + \frac{N_1}{D_1}.$$

Operando sulla $N_1 : D_1$ come si fece sulla $N : D$ vedremo che se si pongano le

$$\text{(III}'\text{)}\quad N_1 = F n_1 + \nu_1\,, \qquad N_2 = F n_2 + \nu_2\,, \qquad \ldots\, N_{i-1} = F n_{i-1} + \nu_{i-1}$$

$$\text{(IV}'\text{)}\quad n_1 - \frac{\nu_1}{\delta_i} d_i = N_2\,, \qquad n_2 - \frac{\nu_2}{\delta_2} d_2 = N_3\,, \qquad \ldots\, n_{i-1} - \frac{\nu_{i-1}}{\delta_i} d_i = N_i$$

si avrà lo sviluppo

$$\text{(B)}\quad \frac{N}{D} = \frac{\nu}{\delta_i F^i} + \frac{\nu_1}{\delta_i F^{i-1}} \ldots + \frac{\nu^{i-1}}{\delta_i F} + \frac{N_i}{D_i}.$$

92. Se δ_i sia una quantità puramente numerica, il che avverrà sempre quando **F** sia del primo grado, la forma della (A) o della (B) sarà precisamente quella in cui si brama avere lo sviluppo; ma se il fattore **F** sia del secondo grado, e se δ_i contenga la x noi porremo

$$\text{(V)}\quad F = \delta_i f + \varphi\,, \qquad \text{(VI)}\quad \nu = \delta_i m + \mu$$

dove f sarà un binomio del primo grado, ed m, μ, φ saranno quantità numeriche: dopo ciò l'equazione

$$Fn+\nu=AFd_i+A\delta_i+FN_1$$

potrà scriversi sotto la forma

$$F\left(n+\frac{\mu}{\varphi}\right)+m\delta_i-\frac{\mu}{\varphi}f\delta_i=A\delta_i+F(Ad_i+N_1)$$

e si decomporrà nelle due

$$m-\frac{\mu}{\varphi}f=A,$$

$$\text{(VII)}\quad n+\frac{\mu}{\varphi}-\left(m-\frac{\mu}{\varphi}f\right)d_i=N_1$$

ed in luogo della (A) avremo la

$$\frac{N}{D}=\frac{m\varphi-\mu f}{\varphi F^i}+\frac{N_1}{D_1}.$$

E se vorremo continuare a decomporre $N_1:D_1$, porremo

$$\text{(III}'\text{)}\quad N_1=Fn_1+\nu_1, \qquad \dots\; N_{i-1}=Fn_{i-1}+\nu_{i-1}$$

$$\text{(VI}'\text{)}\quad \nu_1=m_1\delta_i+\mu_1, \qquad \nu_2=\delta_i m_2+\mu_2, \qquad \dots\; \nu_{i-1}=\delta_i m_{i-1}+\mu_{i-1}$$

$$\text{(VII}'\text{)}\quad n_1+\frac{\mu_1}{\varphi}-\left(m_1-\frac{\mu_1}{\varphi}f\right)d_i=N_2, \qquad \dots\; n_{i-1}+\frac{\mu_{i-1}}{\varphi}-\left(m_{i-1}-\frac{\mu_{i-1}}{\varphi}f\right)d_i=N_i$$

ed avremo

$$\text{(C)}\quad \frac{N}{D}=\frac{m\varphi-\mu f}{\varphi F^i}+\frac{m_1\varphi-\mu_1 f}{\varphi F^{i-1}}+\frac{m_2\varphi-\mu_2 f}{\varphi F^{i-2}}\dots+\frac{m_{i-1}\varphi-\mu_{i-1}f}{\varphi F}+\frac{N_i}{D_i}.$$

Questa trasformazione non vale quando $\varphi=0$, nel qual caso D_i è ancora divisibile per δ_i che è un fattore di F.

93. Ecco dunque come si procederà per decomporre la frazione $N:D$; trovati tutti i fattori reali del primo o del secondo grado nei quali si decompone il denominatore D, per un gruppo F^i di fattori uguali si calcolino le formule

$$\text{(I)}\quad D=FD_1=F^2D_2\dots=F^iD_i, \qquad \text{(II)}\quad D_i=Fd_i+\delta_i$$

$$\text{(III)}\quad N=Fn+\nu \qquad \text{(IV)}\quad n-\frac{\nu}{\delta_i}d_i=N_1$$

e se i sia maggiore dell'unità, anche le analoghe (III') (IV'), poscia nel caso che δ_i sia un numero, si avrà lo sviluppo

$$\text{(B)}\quad \frac{N}{D}=\frac{\nu}{\delta_i F^i}+\frac{\nu_1}{\delta_i F^{i-1}}\dots+\frac{\nu_{i-1}}{\delta_i F}+\frac{N_i}{D_i}$$

Che se δ_i sia un binomio del primo grado (il che potrà avvenire quando F sia del secondo) bisognerà calcolare invece della (IV) le

$$\text{(V)}\ F=\delta_i f+\varphi\,,\qquad \text{(VI)}\ \nu=\delta_i m+\mu\,,\qquad \text{(VII)}\ n+\frac{\mu}{\varphi}-\left(m-\frac{\mu}{\varphi}f\right)d_i=N_i$$

e poscia se $i>1$ le analoghe (III'), (VI'), (VII'), e si avrà

$$\text{(C)}\quad \frac{N}{D}=\frac{m\varphi-\mu f}{\varphi F^i}\dots+\frac{m_{i-1}\varphi-\mu_{i-1}f}{\varphi F}+\frac{N_i}{D_i}.$$

Rispetto agli altri fattori contenuti in D_i sarà generalmente più comodo di procedere nello stesso modo alla decomposizione della $N_i:D_i$, ma si potrebbe anche riprendere il calcolo operando sulla proposta $N:D$.

94. Sia proposta per primo esempio da decomporre la formula

$$\frac{N}{D}=\frac{2x^4-20x^3+55x^2-40x-13}{x^5-12x^4+52x^3-106x^2+123x-90}\,;$$

avendo trovato che il denominatore ha il fattore $F=x-3$, noi lo divideremo due volte per $x-3$, e ciò mediante il solito algoritmo relativo alla cifra 3; e siccome anche la seconda volta si ha un residuo nullo, così lo divideremo una terza volta, e chiameremo d_2 il quoziente, e δ_2 il residuo. Similmente divideremo N, ed avremo il quoziente n ed il residuo ν; poscia calcoleremo

$$N_1=n-\frac{\nu}{\delta_2}d_2\,,$$

che diviso per F darà il quoziente n_1 ed il residuo ν_1; finalmente calcoleremo

$$N_2=n_1-\frac{\nu_1}{\delta_2}d_2$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1\,x^5-12\,x^4+52\,x^3-106\,x^2+123\,x-90 \quad =D \\
3 & 1\,x^4-\;\;9\,x^3+25\,x^2-\;\;31\,x\;+\;\;30 \qquad 0 \;=D_1 \\
3 & 1\,x^3-\;\;6\,x^2+\;\;7\,x-\;\;10 \qquad\qquad 0 \qquad =D_2 \\
3 & 1\,x^2-\;\;3\,x-\;\;2\;=\;d_2, \quad -\;16\;=\;\delta_2 \\
\hline
 & 2\,x^4-20\,x^3+55\,x^2-40\,x-13 \qquad\qquad =N \\
3 & 2\,x^3-14\,x^2+13\,x-\;\;1=n,-16=\nu \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
n-\dfrac{\nu}{\delta_2}d_2=2\,x^3-15\,x^2+16\,x+1 \qquad =N_1 \\
\qquad\quad 3\;|\;2\,x^2-\;\;9\,x-11=n_1 \quad -32=\nu_1 \\
n_1-\dfrac{\nu}{\delta_2}d_2= \qquad -\;\;3\,x-\;\;7 \qquad\qquad =N_2
\end{array}$$

e così avremo per la (B) del § 93

$$\frac{N}{D}=\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{2}{x-3}-\frac{3\,x+7}{x^3-6\,x^2+7\,x-10}.$$

Per decomporre la nuova frazione

$$\frac{N}{D}=\frac{-3\,x-7}{x^3-6\,x^2+7\,x-10},$$

considereremo il fattore $F=x-5$ del denominatore, ed operando nel modo solito avremo

$$\begin{array}{r|l}
 & 1\,x^3-6\,x^2+7\,x-10 \qquad =D \\
5 & 1\,x^2-1\,x\;+2 \qquad 0 \qquad =D_1 \\
5 & 1\,x\;+4=d_1, \qquad 22=\delta_1 \\
\hline
 & -3\,x-7 \qquad\quad =N \\
5 & -3\;\;=n,-22=\nu
\end{array}$$

$$n-\frac{\nu}{\delta_1}d_1=\;1\,x+1 \qquad =N_1$$

quindi

$$\frac{-3\,x-7}{x^3-6\,x^2+7\,x-10}=\frac{-1}{x-5}+\frac{x+1}{x^2-x+2}.$$

Se dalla formula proposta si avesse voluto dedurre immediatamente la frazione che corrisponde al fattore $F=x^2-x+2$, fatti i seguenti calcoli dipendenti dalle (I) (II) (III), e nei quali le divisioni

per $F=x^2-x+2$ si eseguirono nel modo già indicato al § 82 mediante le due cifre $1,\ -2$

$$\begin{array}{r|rrrrrrl}
 & 1x^5 & -12x^4 & +52x^3 & -106x^2 & +123x & -90 & =D \\
-2 & & & -2 & +22 & -78 & +90 & \\
1 & & +1 & -11 & +39 & -45 & & \\
\hline
 & 1x^3 & -11x^2 & +39x & -45 & 0 & 0 & =D_1 \\
-2 & & & -2 & +20 & & & \\
1 & & +1 & -10 & & & & \\
\hline
 & 1x & -10=d_1, & 27x & -25=\delta_1 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 2x^4 & -20x^3 & +55x^2 & -40x & -13 & =N \\
-2 & & & -4 & +36 & -66 & \\
1 & & +2 & -18 & +33 & & \\
\hline
 & 2x^2 & -18x & +33=n, & 29x & -79 & =\nu
\end{array}$$

poscia, osservando che il residuo δ_1 contiene x, vedremo che si deggiono calcolare le

$$\text{(V)}\quad F=f\delta_1+\varphi \qquad \text{(VI)}\quad \nu=\delta_1 m+\mu\,,$$

cioè

$$\begin{array}{r|l}
 & 1x^2-1x+2=F \\
 & \quad +\frac{25}{27}-\frac{50}{729} \\
\hline
\text{divisore } 27x-25 & \frac{1}{27}x-\frac{2}{729}=f, \quad \frac{1408}{729}=\varphi
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 29x-79=\nu \\
 & \quad +\frac{725}{27} \\
\hline
\text{divisore } 27x-25 & \frac{29}{27}=m. \quad -\frac{1408}{27}=\mu
\end{array}$$

poscia

$$m-\frac{\mu}{\varphi}f=x+1$$

$$\text{(VII)}\quad n+\frac{\mu}{\varphi}-\left(m-\frac{m}{\varphi}f\right)d_1=\left\{\begin{array}{l} 2x^2-18x+33-27 \\ -x^2+9x+10 \end{array}\right\}=x^2-9x+16=N_1$$

e quindi

$$\frac{N}{D}=\frac{x+1}{x^2-x+2}+\frac{x^2-9x+16}{x^3-11x^2+39x-45}.$$

93. Esempio II. Sia proposta la

$$\frac{N}{D}=\frac{x^2+200}{x^3-36x^2+300x-1800}.$$

Bisognerà da prima decomporre in fattori il denominatore. A tal fine cominciando colla cifra **10** formo la prima tabella

	1	−36	+300	−1800
10	1	−26	+40	−1400
	1	−16	−120	
	1	−6		

così sono sparite due variazioni di segno; ma adoperando il nostro criterio vedremo che niuna radice è compresa tra **0** ed **1** nell'equazione che ha i coefficienti **1 — 3, 6 + 3 — 1, 8**. Infatti nella seconda riga di

	1	−3,6	+3	1,8	
1	+1,4	+2,4	−1,2	+1,8	0

della quale l'ultimo termine è zero, gli altri sono tutti dello stesso segno tranne il solo **— 1,2** che è seguito da uno di maggior valore. Continuando adesso il calcolo coi coefficienti trovati nella prima tabella avremo colla cifra **10**, poscia successivamente colle cifre **7**, **4'**, ecc.

	1	− 6	−120	−1400
10	1	+ 4	− 80	−2200
	1	+14	+ 60	
	1	+24		
7	1	+31	+277	− 261..
	1	+38	+543.	
	1	+45		
4′	0.1	+45,4	+5611,6	−3654
	0.1	+45.8	+579,4,8	
	0.1	+46.2		
6″		+0.46	+ 582,2	− 161
		+0.46	+ 58,5,0	
2‴			58,5	− 44
7ᵛ			5,9	− 3

e troveremo che il denominatore ha l'unico fattore del primo grado $F = x - 27{,}463$: la divisione di D per questo fattore (eseguita adoperando $27{,}463$ come abbiamo sempre fatto per una sola cifra, ma scrivendo i prodotti che furono calcolati separatamente e che deggiono poscia sottrarsi) ci servirà per verificazione del fatto calcolo; ripeteremo la divisione per ottenere d_1 e δ_1, divideremo anche N, ecc.

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1\,x^3 - 36\,x^2 & +300\,x & -1800 & = D \\
 & \quad +27{,}463 & -234{,}452 & +1800{,}15 & \\
\hline
27{,}463 & 1\,x^2 - \ 8{,}537\,x & + \ 65{,}548 & 0 & = D_1 \\
 & \quad +27{,}463 & +519{,}75 & & \\
\hline
27{,}463 & 1\,x + 18{,}926 = d_1, & 585{,}30 = \delta_1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|lll}
 & 1\,x^2 & +200 & = N \\
 & \quad +27{,}463 & +754{,}21 & \\
\hline
27{,}463 & 1\,x + 27{,}463 = n, & 954{,}21 = \nu &
\end{array}$$

$$1{,}6317\,x + 30{,}882 = \frac{\nu}{\delta_1} d_1$$

$$n - \frac{\nu}{\delta_1} d_1 = -0{,}6317\,x - \ 3{,}419 = N_1$$

e finalmente (ommettendo le ultime cifre sulle quali poco si può contare) avremo

$$\frac{N}{D} = \frac{1{,}632}{x - 27{,}463} - \frac{0{,}632\,x + 3{,}42}{x^2 - 8{,}537\,x + 65{,}55}.$$

(Presentata li 31 Marzo e 29 Dicembre 1845)

NOTE

Nota I. al § 44. Il calcolo esposto nel § 44 è conforme alle operazioni aritmetiche, nelle quali non si calcolano se non se cifre positive; ma se non si abbia difficoltà ad adoperare anche cifre negative (§ 11) i calcoli si renderanno più facili, perchè ai 9 si sostituiranno altrettanti 0, e perchè le moltipliche si faranno quasi sempre colle cifre più piccole 1, 2, 3, 4, 5. Così nell'esempio succitato si comincerà colla cifra 2,

$$\begin{array}{r|l} & 1-15+68-83 \\ \hline 2 & 1-13+42+\ \ 1 \\ & 1-11+20 \\ & 1-\ \ 9 \end{array}$$

e scorgendo che l'ultimo termine -83 cangiò di segno divenendo $+1$, si rileverà che si è alcun poco oltrepassata una radice (§ 19), per lo che bisognerà adoperare una cifra negativa. I coefficienti $1-90+2000+1000$ mostrano che la cifra $-1'$ sarebbe troppo grande, perciò moltiplicheremo di nuovo per la progressione decupla, ed adoperando la cifra $-5''$, che è quella che rende più piccolo l'ultimo termine -22625 della prima riga, otterremo i coefficienti $1-915+209075-22625$. Se non occorra spingere l'approssimazione molto innanzi moltiplicheremo questi coefficienti per la progressione 0,001 0,01 0,1 1

$$\begin{array}{r|llll} & 1-900 & +200000 & + & 1000000 \\ \hline -5'' & 1-905 & +204525 & - & 22625 \\ & 1-910 & +209075 & & \\ & 1-915 & & & \\ \hline +1''' & ,001-9,15 & +20898,4 & - & 1727 \\ & \quad\ -9,15 & +20889,2 & & \\ \hline +8' & & +208,9 & - & 56 \\ +3'' & & +20,9 & + & 7 \\ -3'' & & +2,1 & + & 1 \end{array}$$

e continueremo nel modo solito; sicchè poscia raccogliendo le trovate cifre avremo

$$x=2{,}0010830-0.0500003=1{,}9510827\ .$$

Nota II. al § 54. Perchè il lettore possa facilmente giudicare se il metodo esposto nel § 5 sia preferibile a quello del Gräffe io tolgo un esempio dalla Memoria nella quale l'Encke espose questo ultimo metodo (*Jour. für die Mathematik von Crelle Vol.* XXII 1841).

L'equazione è

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 - 5x = -4x^2 - 6$$

facendo i quadrati dei due membri l'Encke ottiene l'equazione in (x^2)

$$x^{14} - 2x^{10} + 29x^6 - 23x^2 = 4x^{12} - 2x^8 - 14x^4 + 36\,,$$

e nuovamente elevando i due membri alla seconda potenza ottiene l'equazione in (x^4); da questo punto egli continua il calcolo col mezzo dei logaritmi a 5 decimali adoperando la tavoletta del Gauss, e così giunge alla ottava trasformata in (x^{256}), la quale gli dà per la radice più piccola il logaritmo 0,044541 ed il valore 1,10800. Per ottenere una maggior approssimazione l'autore adopera il metodo del Newton, vale a dire sostituisce il trovato valore tanto nell'equazione quanto nella sua derivata, e trova 1,1080166; ed adoperando i logaritmi a 7 decimali non si potrebbe spingere l'approssimazione più oltre.

Da questi cenni può raccogliersi quanto lunghi sieno i calcoli richiesti dal metodo del Gräffe: ecco il dettaglio di quelli che ci saranno sufficienti a determinare la più piccola radice positiva spingendo l'approssimazione fino a che l'indecisione sia di appena una unità della settima decimale. — Calcolo della trasformata in $(x - 1)$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 + 0 - 2 - 0 - 3 + 4 - 5 + 6 \\
\hline
1 & 1 + 1 - 1 - 1 - 4 - 0 - 5 + 1 \\
 & 1 + 2 + 1 + 0 - 4 - 4 - 9 \\
 & 1 + 3 + 4 + 4 + 0 - 4 \\
 & 1 + 4 + 8 + 12 + 12 \\
 & 1 + 5 + 13 + 25 \\
 & 1 + 6 + 19 \\
 & 1 + 7
\end{array}$$

Sono sparite due variazioni, ed il nostro criterio (§ 34)

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 + 0 - 2 - 0 - 3 + 4 - 5 + 6 \\
\hline
1 & -1 - 0 - 0 - 2 - 2 - 5 - 1 - 6 \quad 0
\end{array}$$

mostra che l'equazione non può avere radici da 0 ad 1; essa ha perciò un valor critico compreso in questo intervallo, oltre l'altro valor critico $= 0$. La piccolezza dell'ultimo termine $+1$ c'induce ad adoperare una piccola cifra di decimi

	1 + 70 + 1900 + 25000 + 120000 — 400000 — 9000000 + 10000000
1′	1 + 71 + 1971 + 26971 + 146971 — 253029 — 9253029 + 746971
	1 + 72 + 2043 + 29014 + 175985 — 77044 — 9330073
	1 + 73 + 2116 + 31130 + 207115 + 130071
	1 + 74 + 2190 + 33320 + 240435
	1 + 75 + 2265 + 35585
	1 + 76 + 2341
	1 + 77

la cifra dei centesimi è evidentemente nulla; passeremo perciò ai millesimi

	0,0004 + 0,240 + 13,01	— 93300,7	+	746971
8‴	,0004 + ,243 + 14,95	— 93181,1	+	1522
	+ ,246 + 16,92	— 93045,7		
1′		— 930,5	+	592
6″		— 93	+	34
4‴		— 9,3	—	3

e così avremo trovato il valore $x = 1,1080164$ che meglio di quello dell'Encke si avvicina al vero $1,1080163595\ldots$.

Nota III. al § 70. Quando si sono trovati due valori abbastanza approssimati di a e di b, sicchè si abbia all'incirca $x = a + \sqrt{(-b)}$, il Legendre suggerisce di calcolare le correzioni da farsi ad a e b con una regola analoga all'approssimazione Newtoniana, cioè col sostituire il predetto valore approssimato di x tanto nel polinomio che costituisce il primo membro dell'equazione quanto nel suo derivato, e dividere il primo risultamento pel secondo: ora il nostro calcolo dà con tutta facilità tali risultamenti. poichè si dimostra che se sieno D F i due ultimi coefficienti del primo polinomio ausiliario trasformato in $(y-b)$, ed E G i due ultimi coefficienti del secondo polinomio ausiliario pure trasformato in $(y-b)$, il primo risultamento è $F\sqrt{(-b)} + G$ ed il secondo è $-2E\sqrt{(-b)} + 2bD + F$, e perciò il valore corretto di x sarà

$$x = a + \sqrt{(-b)} + \frac{F\sqrt{(-b)} + G}{2E\sqrt{(-b)} - 2bD - F}.$$

Così nell'esempio del § 70 per $a = 0,2$ $\quad b = 2$ si trovò

$$D = 6,24\,, \quad F = -0,158\,, \quad E = 22,736\,, \quad G = 1,0567$$

quindi può prendersi come valore approssimato di x

$$0.2 + \sqrt{(-2)} + \frac{-0,158\sqrt{(-2)} + 1,0567}{45,472\sqrt{(-2)} - 24,96 + 0,158} = 0,2 + \sqrt{(-2)} + \frac{-41 - 44\sqrt{(-2)}}{4746} =$$

$$= 0,191 + 0,99\sqrt{(-2)} = 0,191 + \sqrt{(-1,96)}.$$

Poscia per $a=0,19 \quad b=1,958$ si trova

$$D=7,366\,,\quad F=0,001\,,\quad E=21,910\,,\quad G=-0,148$$

perciò

$$x=0,19+\sqrt{(-1,958)}+\frac{0,001\sqrt{(-1,958)}\;-0,148}{43,82\sqrt{(-1,958)}\;-28,846}=0,19095+\sqrt{(-1.96355)},$$

che poco si scosta dal vero valore $x=0,190983+\sqrt{(-1,963526)}$.

Nota IV. *Uso della risoluzione delle equazioni nell' interpolazione e nella ricerca delle radici di altre equazioni.*

Io credo che, per quanto elevato sia il grado delle equazioni, il metodo meno laborioso per risolverle sia quello che abbiamo esposto nel § 5, e che le tavole logaritmiche o trigonometriche non possano riuscire di alcun vantaggio; pure se l'equazione mancasse di un gran numero dei suoi termini non sarebbe opportuno di toglierle la sua semplicità passando alle solite trasformate; sicchè in tal caso riesce più comodo l'uso delle false posizioni. La correzione da farsi ad una falsa posizione può desumersi dal metodo del Newton, sostituendo il supposto valore anche nella derivata della proposta equazione, ma è più semplice servirsi della regola di doppia falsa posizione, che pel grado d'approssimazione corrisponde col metodo Newtoniano. Inoltre se si facciano fin da principio più di due false posizioni si ha il vantaggio di operare sopra numeri molto semplici, e si scorgono facilmente anche due o più radici uguali o vicinissime, le quali potrebbero sfuggire ove si adoperassero i precedenti metodi fondati sull' approssimazione *lineare*. A tal fine si attribuiscano successivamente all' incognita alquanti valori presi in progressione aritmetica e non molto discosti dalla cercata radice, si calcolino i corrispondenti valori del primo membro dell'equazione, poscia coll' interpolazione si determini il valore dell' incognita corrispondente al dato valore del secondo membro. Molte formule furono suggerite per l' interpolazione; la più comoda sembrami la seguente

$$\begin{aligned} y=y_0 &+ t\left(\Delta'-\frac{\Delta''}{2}+\frac{\Delta'''}{3}-\frac{\Delta^{iv}}{4}+\frac{\Delta^{v}}{5}-\text{ecc.}\right)+\\ &+t^2\left(\frac{\Delta''}{2}-\frac{3\,\Delta'''}{6}+\frac{11\,\Delta^{iv}}{24}-\frac{50\,\Delta^{v}}{120}+\frac{274\,\Delta^{vi}}{720}-\text{ecc.}\right)+\\ &+t^3\left(\frac{\Delta'''}{6}-\frac{6\,\Delta^{iv}}{24}+\frac{35\,\Delta^5}{120}-\frac{225\,\Delta^{vi}}{720}+\text{ecc.}\right)+\\ &+t^4\left(\frac{\Delta^{iv}}{24}-\frac{10\,\Delta^{v}}{120}+\frac{85\,\Delta^6}{720}-\text{ecc.}\right)+\\ &+t^5\left(\frac{\Delta^{v}}{120}-\frac{15\,\Delta^{vi}}{720}+\text{ecc.}\right)+t^6\left(\frac{\Delta^{vi}}{720}-\text{ecc.}\right)+\text{ecc.}\end{aligned}$$

dove t prende per le successive supposizioni i valori 0, 1, 2, 3, ecc.; y_0 è il valore del primo membro corrispondente a $t=0$; Δ', Δ'', Δ''', ... sono le differenze prima, seconda, ecc. di tali valori. Finchè la risoluzione delle equazioni si considerava come una ricerca difficile, la precedente formula poteva sembrare affatto inopportuna a trovare t conoscendo y; ma invece ciò si riduce ad un'operazione speditissima. Trovato il valore di t si avrà immediatamente quello dell'incognita x, giacchè le primitive posizioni si presero in progressione aritmetica: se ciò non fosse, si adoprerebbe una formula d'interpolazione simile alla precedente.

Sia proposta da risolvere l'equazione $x^7-3x^4-6=0$ tolta dalla Memoria citata nella Nota II.; vedremo intanto che essa ha una sola variazione di segno, e che mutando x in $-x$ non ha alcuna variazione: perlochè conchiuderemo (§ 39) che 0 è un valor critico triplo, e che l'equazione ammette una radice positiva e nessuna negativa. Ponendo successivamente $x=1,4$ ed $x=1,7$ si vede che una radice è compresa fra tali valori; si facciano anche le posizioni intermedie e si formi la tavoletta dei corrispondenti valori di $y=x^7-3x^4-6$ e delle loro differenze

t	x	y	Δ'	Δ''	Δ'''
0	1,4	− 6,9835			
			2,8819		
1	1,5	− 4,1016		2,4024	
			5,2843		1,1082
2	1,6	+ 1,1827		3,5106	
			8,7949		
3	1,7	+ 9,9776			

poscia ponendo nella precedente formula d'interpolazione

$$y=0\,,\quad y_0=-69835\,,\quad \Delta'=28819\,.\quad \Delta''=24024\,.\quad \Delta'''=11082$$

si avrà l'equazione

$$1847\ t^3+\ 6471\ t^2+20501\ t-69835=0$$

1	1847	+ 8318	+ 28819	− 41016
		+ 10165	+ 38984	
		+ 12012		
8′	1,847	+ 134,90	+ 4977,6	− 1195
		+ 149,68	+ 6175,0	
		+ 164,46		
1″	0,001	+ 1,64	+ 619,1	− 576
			+ 620,7	
9‴			+ 62,1	− 17

che col calcolo soprascritto dà $t=1,819$ e perciò $x=1,5819$, valore esatto fino all'ultima decimale, quantunque i valori di Δ' e Δ'' fossero tutt'altro che piccoli. — Essendo molto giovevole assicurarsi dell'esattezza dei calcoli che si vanno facendo (§ 9) noi non tralascieremo di notare che dee osservarsi se a $t=1$ corrisponda lo stesso valore -41016 tanto nella tavoletta quanto nella successiva tabella di calcolo, poichè se ciò non fosse sarebbe occorso qualche errore nella determinazione dei coefficienti dell'equazione in t.

L'elevare alle potenze quarta e settima i numeri $1,4$, $1,5$, ecc. è cosa molto spedita, ma se si preferisca adoperare i logaritmi gioverà assumere per posizioni primitive non $x=1,4$ ecc., ma piuttosto $\log x = 0,18$, $= 0,19$, $= 0,20$, $= 0,21$, e determinando i corrispondenti valori di $y = \log(x^7 - 3x^4)$ si troverà mediante la predetta regola d'interpolazione che ad $y = \log 6$ corrisponde $\log x = 0,19916$. — Peraltro quando si voglia adoperare le tavole logaritmiche giova profittare delle *differenze* che in esse si trovano per eseguire l'approssimazione Newtoniana molto speditamente e senza bisogno del calcolo differenziale. Questo metodo, che può riuscire vantaggioso in moltissimi casi, consiste nel calcolare i valori dei termini dell'equazione corrispondenti ad un dato valore dell'incognita, e nello stesso tempo tener conto degli accrescimenti che soffrirebbero tali termini per un dato accrescimento dell'incognita stessa. Ciò s'intenderà meglio nei seguenti esempii.

Se $\log x = 0,18000$ si ha $\log(x^7) = 1,26000$, $x^7 = 18,197$, ed un piccolo accrescimento α nel valore di $\log x$, e perciò 7α nel $\log x^7$, produce l'accrescimento $7000\,\alpha : 24 = 296\,\alpha$ nel valore di x^7 (giacchè la tavola dei logaritmi mostra che la differenza $0,00024$ nel logaritmo produce la differenza $0,01$ nel numero); inoltre $\log(3x^4) = 1,19712$, $3x^4 = 15,744$ e l'accrescimento 4α nel $\log(3x^4)$ produce l'accrescimento $4000\,\alpha : 28 = 143\,\alpha$ nel valore di $3x^4$: viene da ciò che $x^7 - 3x^4 - 6 = -3,547$, e che dividendo tal numero per $296 - 143 = 153$ si avrà $-0,023$ per l'errore approssimato da togliersi dal $\log x$; sicchè si avrà per seconda posizione $\log x = 0,20300$, e ben presto si giungerà al valore esatto.

Il presente metodo offre una brevissima risoluzione delle equazioni algebraiche trinomie adoperando la tavola del Gauss, che dà il logaritmo della somma di due numeri, dei quali si conoscano i logaritmi. A tal uopo mediante la trasposizione dei termini si tolga all'equazione trinomia ogni segno —, e dei due termini che debbono sommarsi uno si riduca all'unità; così per esempio la precedente equazione si scriverà sotto la forma $\frac{1}{2}x^4 + 1 = x^7 : 6$: è noto che se si ponga $\log \frac{1}{2}x^4 = A$ la tavola del Gauss dà il valore di $C = \log(\frac{1}{2}x^4 + 1)$; bisogna dunque trovare tal valore di A che il corrispondente C sia eguale al log. del secondo membro $x^7 : 6$. Ora è palese che se A aumenta della quantità α il logaritmo del secondo membro aumenta di $7\alpha : 4$, mentre il valore di C cresce di una certa frazione di α, che è data approssimatamente dalla differenza dei successivi valori di C quale si trova nella tavola del Gauss; così ci sarà facile scorgere qual correzione α debba farsi al valore di A. Ecco il dettaglio del calcolo, nel quale (come sarà sempre opportuno) si scelse per prima posizione $A = 0,000$, e quindi $\log x = 0,07525\frac{3}{4}$ e $7\log x - \log 6 = 9,74865$

A	C	log. 2°. memb.	Differenza		Errore di A
0.000	0,30103	9,74865	,55238	:(0,50 — $\frac{7}{4}$)	= — 0,44
0,440	0,57452	0,51865	,05587	:(,73 — 1,75)	= — 0,055
0,496	0,61630	0.61665	— ,00035	:(,76 — 1,75)	= 0,00035
0,49565	0,61603	0,61604	— ,00001	:(,76 — 1,75)	= 0,00001

per la seconda correzione si prese 0,056 anzichè 0,055; giacchè il primo numero essendo divisibile per 4 dà speditamente la correzione 0,098 da farsi al log. del secondo membro. Dal trovato $A = 0,49564$ si deduce $\log x = 0,19917$.

Daremo un altro esempio che presenta qualche maggior difficoltà. Si cerchino le radici dell'equazione $10^{0,29710} x^3 + 1 = x^7$; per la radice positiva cominceremo ponendo, al solito, $A = 0$, perciò $\log x = -0,09903\frac{1}{3}$, e faremo le seguenti supposizioni

A	C	log. 2.° memb.	Differenza		Errore di A
0,000	0,30103	$-0,69323$	,99426	$:(0,50-\frac{7}{3}\ )$	$=-0,543$
0,540	0,65005	0,56677	,08328	$:(\ .78-2,33)$	$=-0,054$
0,594	0,69253	0,69277	$-,00024$	$:(\ ,80-2,33)$	$=\ 0,00016$
0,59384	0,69240	0,69240			

quindi avremo $\log x = 0,09891$. — Le radici negative della precedente equazione sono le positive della $x^7 + 1 = 10^{0,29710} x^3$; cominciando con $A = 7 \log x = 0$ troveremo che A dev'esser negativa, ed infatti è facile convincersi che se A aumentasse di α il log. del secondo membro aumentando di $\frac{3}{7}\alpha$ non potrebbe giammai raggiungere il valore di C, il quale aumenta più rapidamente. È poi noto che nella tavola del Gauss quando A è negativa dee prendersi il valore di B in luogo di quello di C; così faremo le seguenti posizioni

A	B	log. 2.° memb.	Differenza		Errore di A
0,000	0,30103	0,29710	.00393	$:(0,50-\frac{3}{7}\ )$	$=0,056$
$-0,056$	0,27393	0,27310	,00083	$:(\ ,47-,43)$	$=0,021$
$-0,077$	0,26423	0,26410	,00013	$:(\ ,45-,43)$	$=0,0065$
$-0,084$	0,26106	0,26110	$-.00004$	$:(\ ,45-.43)$	$=0,002$
$-0,082$	0,26196	0,26196			

ed avremo $\log x = -0,01171$. — Ora i segni della proposta equazione $x^7 - 1,982\ x^3 + 1 = 0$ mostrano che essa o non ha alcuna radice positiva o ne ha due; ci rimane dunque da cercare un'altra radice. Pei principii del calcolo differenziale le due radici rimarranno separate da quel valore di A che rende eguali gli aumenti del log. secondo membro, e del C, oppur B, corrispondente ad A; nel nostro caso l'aumento del secondo membro è $\frac{3}{7} = 0,43$, e la tavola del Gauss mostra che tal differenza nei valori di B corrisponde ad $A = -0,125$. Abbiamo trovata una radice corrispondente ad $A = -0,082 > -0,125$, l'altra corrisponderà per conseguenza ad $A < -0,125$; noi la cercheremo continuando la precedente tavoletta con $A = -0,210$

A	B	log. 2.° memb.	Differenza		Errore di A
$-0,210$	$0,20860$	$0,20710$	$,00150$	$:(,38-,43)$	$=-0,030$
$-0,175$	$0,22229$	$0,22210$	$,00019$	$:(,40-,43)$	$=-0,0063$
$-0,168$	$0,22510$	$0,22510$			

ed otterremo $\log x = -0,02400$.

Per le equazioni trinomie non solo si possono trovare con somma facilità le radici reali, ma eziandio le immaginarie adoperando le tavole trigonometriche. Infatti, come ha già osservato il Legendre, se nell'equazione trinomia $a\,x^m + b\,x^n + c = 0$ si pone $x = r\,\varepsilon^{\varphi}$, essendo $\varepsilon = e^{\sqrt{-1}}$, dall'equazione $a\,r^m\,\varepsilon^{m\varphi} + b\,r^n\,\varepsilon^{n\varphi} + c = 0$ e dalla sua coniugata $a\,r^m\,\varepsilon^{-m\varphi} + b\,r^n\,\varepsilon^{-n\varphi} + c = 0$ si deducono le

$$r^m = \frac{c \operatorname{sen}(n\,\varphi)}{a \operatorname{sen}(m-n)\,\varphi}, \qquad r^n = -\frac{c \operatorname{sen}(m\,\varphi)}{b \operatorname{sen}(m-n)\,\varphi}$$

che combinate insieme danno

$$\frac{\operatorname{sen}^m(m\,\varphi)}{\operatorname{sen}^n(n\,\varphi)\operatorname{sen}^{m-n}(m-n)\,\varphi} = \frac{(-b)^m}{a^n\,c^{m-n}}$$

colla qual equazione si trovano i valori dell'angolo φ.

Sia proposta per esempio l'equazione $x^7 + 3\,x^4 + 6 = 0$; avremo

$$7 \log(-\operatorname{sen} 7\,\varphi) - 4 \log \operatorname{sen} 4\,\varphi - 3 \log \operatorname{sen} 3\,\varphi = 7 \log 3 - 3 \log 6 = 1,0053950\,.$$

Osservando che dev'essere o negativo il $\operatorname{sen} 7\,\varphi$ e positivi i due $\operatorname{sen} 4\,\varphi$ $\operatorname{sen} 3\,\varphi$, oppure negativi questi due ultimi e positivo il primo, riconosceremo che un valore di φ è compreso tra $0,286$ e $0,5$, uno tra $0,667$ e $0,858$, ed uno tra $1,43$ e $1,5$ (l'unità essendo l'angolo retto). Prendiamo a determinare il secondo valore di φ. Se la tavola trigonometrica contenesse i log. seni di grado in grado centesimale, si sostituirebbero nella precedente equazione i valori

$$\varphi = 0,72\,, \quad = 0,73\,, \quad = 0,74\,, \quad = 0,75\,, \quad = 0,76\,,$$

e per eseguire l'interpolazione si risolverebbe un'equazione del quarto grado e si troverebbe $\varphi = 0,750188$. Che se invece si abbia una tavola completa dei log. seni sarà più comodo adoperare anziché il metodo d'interpolazione quello fondato sull'uso delle differenze, cioè nello stesso tempo che si calcoleranno i termini dell'equazione

$$7 \log \operatorname{sen} 7\,\varphi - 4 \log(-\operatorname{sen} 4\,\varphi) - 3 \log(-\operatorname{sen} 3\,\varphi) - 1,0053950 = 0\,,$$

si terrà conto degli accrescimenti ch'essi subirebbero per un piccolo accrescimento di φ. Cominciando con $\varphi = 0,72$ avremo $\log \operatorname{sen} 5.0400 = 9,9991422$, e la sua differenza corrispondente all'accrescimento $0,0001$ è $-0,0000043$; perciò se φ cresce di α, $\log \operatorname{sen} 7\,\varphi$ cre-

sce di $-0,301\,\alpha$, e $7\log\operatorname{sen}7\varphi$ cresce di $-2,11\,\alpha$. Simili considerazioni si facciano per $\log(-\operatorname{sen}2,8800)=9,9922385$ e per la sua differenza $+0,0000130$, nonchè per log $(-\operatorname{sen}.\,2,1600)=9,3956581$ e per la sua differenza $+0,0002656$, e col seguente calcolo si vedrà che il primo membro dell'equazione risulta $0,8326721$ anzichè 0, e che dividendo tal errore per $-28,09$ si avrà approssimatamente l'errore $-0,0296$ da togliersi dal supposto $\varphi=0,72$.

$$\begin{array}{rrr}
\varphi=0,72 & & \\
7\varphi=5,04 & 9,9939954 & -\ 2,11 \\
4\varphi=2,88 & -9,9689540 & -\ 2,08 \\
3\varphi=2,16 & -8,1869743 & -23,90 \\
 & -1,0053950 & \\
\hline
 & +0,8326721\ : & -28,09\ =-0,0296
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
\varphi=0,7496 & & \\
7\varphi=5,2472 & 9,7648112 & -13,67 \\
4\varphi=2,9984 & -9,9999944 & -\ 0,03 \\
3\varphi=2,2488 & -8,7425740 & -14,90 \\
 & -1,0053950 & \\
\hline
 & +0,0168478\ : & -28,60\ =-0,000589
\end{array}$$

Colla seconda posizione si giunse in simil modo a $\varphi=0,750189$

che pochissimo differisce dal valore esatto $\varphi=0,750188\ldots.$

Abbiamo veduto che la risoluzione delle equazioni algebraiche può utilmente adoperarsi nell'interpolazione, e così servire alla risoluzione di alcune speciali equazioni algebraiche o trascendenti: anche in altro modo mediante la risoluzione di equazioni di grado poco elevato si può trovare una radice di qualche equazione trascendente, quando si conosca un valore approssimato di tal radice. A tal fine sviluppando il primo membro della proposta equazione si ritengano i termini che contengono le prime potenze dell'incognita, e nel modo solito si cerchi la più piccola radice di tal equazione ausiliaria, avvertendo di correggere gli ultimi termini delle successive trasformate in modo che essi sieno i valori appartenenti al primo membro della proposta equazione, anzichè dell'ausiliaria ad essa sostituita.

Serva di esempio l'equazione $z^z=100$: essendo palese che essa è soddisfatta da un valore alquanto inferiore a 4 si ponga $z=4-x$, perciò $(4-x)\operatorname{Log}(4-x)-\operatorname{Log}100=0$ (dove Log. segna i logaritmi iperbolici). Sviluppando in serie il primo membro di tal equazione si ottiene il primo membro di un'equazione ausiliaria del terzo grado, il quale moltiplicato per 32 è

$$x^3+4\,x^2-76,361420\,x+30,080232$$

che col solito metodo dà

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+40-7636{,}14+30080{,}232 \\
\hline
4' & 1+44-7460{,}14+\quad 239{,}672 \\
 & 1+48-7268{,}14 \\
 & 1+52 \\
\hline
3''' & \quad 5{,}2-72665{,}8+\quad 21675 \\
 & \quad 5{,}2-72650{,}2
\end{array}$$

sicchè è approssimatamente $x=0,403$. Ora sostituendo questo valore nella proposta equazione si trova

$$32 \times 3{,}597 \operatorname{Log} 3{,}597 - 32 \operatorname{Log} 100 = -0{,}020796593$$

e moltiplicando per 1000000 si vede che l'ultimo termine della trasformata in $(1000\,x-403)$ anzichè $+21675$ dev'essere $-20796{,}593$; perciò continuando la risoluzione dell'equazione avremo

$$\begin{array}{r|l}
 & -7265-20796{,}6 \\
\hline
-3'' & -7265+\quad 998{,}4 \\
4' & -726{,}5+\quad 272 \\
4'' & -72{,}6-\quad 18
\end{array}$$

onde $\qquad x=0{,}402714$

il valore esatto è $x=0{,}4027149\ldots$

Se l'equazione ausiliaria si fosse formata con un maggior numero di termini (il che sarebbe stato facilissimo) si avrebbe potuto spingere l'approssimazione molto più innanzi.

Troviamo per secondo esempio la più piccola radice dell'equazione di grado infinito

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.4}-\frac{x^3}{1.4.9}+\frac{x^4}{1.4.9.16}-\text{ecc.}=0\,;$$

prendiamo per equazione ausiliaria la $x^4-16\,x^3+144\,x^2-576\,x+576=0$, essa ci darà nel modo solito

$$x=1{,}44+\frac{x'''}{1000}.$$

L'equazione ausiliaria diventa la proposta quando il secondo membro sia, anzichè 0,

$$\lambda=\frac{x^5}{25}-\frac{x^6}{25.36}+\text{ecc.},$$

e sostituendovi il valore approssimato $x=1.44$ si ha $\lambda=0.2375$. Ora la trasformata in x''',

ommesse le decimali d'ordine superiore, è $0,87\,x'''^2 - 2488,7\,x''' + 16825 = 0$, e mutando lo zero del secondo membro in $10000\,\lambda$ avremo

$$0,87\,x'''^2 - 2488,7\,x''' + 14450 = 10000\,\lambda - 2375 .$$

Dalla quale dedurremo

$$x''' = 5,8 + \frac{x^{\prime}}{100}, \quad \text{e} - 24.8\,x^{\prime} + 44 = 10000\,\lambda - 2375$$

Adoperando il valore più approssimato $x = 1,4458$ è facile modificare il calcolo logaritmico, col quale si sono determinati i varii termini di λ; così si trova all'incirca $10000\,\lambda = 2428$. perciò $-24.8\,x^{\prime} - 9 = 0$, dalla quale si ottiene $x^{\prime} = -0,4$; quindi finalmente $x = 1,445796$.

CONSIDERAZIONI

SULLE NOMENCLATURE CHIMICHE

SUGLI EQUIVALENTI CHIMICI

E SU ALCUNE PROPRIETÀ CHE CON QUESTI SI COLLEGANO

DEL PROF. GIUSTO BELLAVITIS

La necessità ideologica di un linguaggio si fa più particolarmente sentire in alcune scienze, le quali nonchè progredire, appena potrebbero esistere se non avessero una sistematica nomenclatura, fondata sulle loro principali teorie e che ne fosse anzi una compendiosa espressione; dal che poi ne segue che quando nel progresso della scienza vengono a mutarsi quelle teorie, debba modificarsi la nomenclatura; necessità questa che toglie al linguaggio quella stabilità che tanto gioverebbe alla sua chiarezza e precisione. E notisi inoltre che quando la nomenclatura non è ritenuta immutabile, essa viene cangiata non solamente al cangiarsi delle teorie su cui si appoggia, ma eziandio quando si crede di poter farvi qualche secondario miglioramento. Ciò avvenne appunto nella Chimica. Dopo che verso la fine del secolo scorso essa fu, direi quasi, creata mediante la teoria pneumatica, dovette abbandonare il suo empirico e molteplice linguaggio e formarsi

una nomenclatura fondata sulla composizione dei corpi; ed in progresso il sempre crescente numero dei composti, e le differenti maniere teoriche di considerarne la composizione, portarono di necessità ripetute e quasi incessanti modificazioni della nomenclatura; per lo che uno stesso corpo è chiamato con parecchi nomi, e può sembrare non del tutto irragionevole il timore che tanta confusione di nomi porti confusione anche nelle idee, od almeno renda malagevole lo studio della scienza. Forse che questo timore è molto meno fondato di quanto a primo aspetto potrebbe sembrare, ed i provetti nella scienza trovano poca difficoltà nelle molteplici nomenclature, poichè i nomi sistematici hanno in confronto degli empirici questo singolare vantaggio di riuscir facilissimi a chi conosce le teorie dalle quali prendono origine. Nulladimeno i diversi progetti di riforma finora pubblicati sembrano indicare che i chimici stessi sentano se non la necessità, almeno l'opportunità di rifondere e richiamare a più sistematici principii le nomenclature da loro usate.

Potrà sembrare ardimento ch'io m'intrattenga di una scienza della quale non ho fatto speciale studio; ma se le mie considerazioni valessero a richiamare sull'argomento l'attenzione di qualche chimico, esse non saranno giudicate affatto inutili.

Quei benemeriti che fondarono la nuova nomenclatura chimica e quelli che la modificarono, ebbero, se non m'inganno, principalmente in vista due oggetti, di esprimere cioè la composizione e le proprietà dei corpi: fu per questo secondo riguardo che i composti dell'ossigeno si distinsero in *ossidi* ed in *acidi*; che i sali risultanti da differenti proporzioni di acido o di base, presero i nomi di *neutri, aciduli, alcalini* o *basici*; che alcune combinazioni aeriformi dell'idrogeno si denominarono in maniera non conforme alla rimanente nomenclatura quasi fossero un gas idrogeno soltanto modificato. Il Brugnatelli cercò di tener conto fra i corpi componenti anche del calorico latente, e riguardando a differenti proprietà ch'egli credette riconoscervi, distinse gli ossidi dai *termossidi*, ecc.; altri cangiamenti egli propose; il *settono* toglieva l'anomalia fra l'azoto ed i suoi composti; il *flogogene* sostituito all'*idrogeno* faceva schivare ogni equivoco tra questo corpo sem-

plice e l'acqua (1); opportune forse ma inutili modificazioni, perchè non furono adottate, e rimasero un inutile ingombro alla scienza.

Crescendo il numero dei composti si crearono nuovi nomi dipendenti unicamente dalla composizione dei corpi; così i numeri cominciarono ad entrare nella nomenclatura, e si ebbero i *protossidi*, i *deutossidi*, ecc., ed i loro composti si distinsero in *protosali*, *deutosali*, ecc.; denominazioni queste ultime contrarie ad ogni ragionevole legge di linguaggio, poichè dicendo *deutosolfato di ferro* si volle intendere il *solfato di deutossido di ferro*, che se si avesse voluto esprimere che il sale contiene una doppia dose di acido si sarebbero confusi i *deutosali* coi *soprasali* (ossia sali aciduli) senza tener conto della maggior dose di ossigeno contenuta in un *deutosale* in confronto del *protosale* acidulo, e delle loro differenti proprietà. Fu molto più consentaneo ai principii del linguaggio l'uso delle desinenze in *oso* ed in *ico*, che il Berzelius applicò agli ossidi, come prima lo erano state agli acidi, e l'impiego di questi medesimi nomi degli ossidi nei nomi dei sali da loro risultanti: così si ebbero le semplici ed espressive denominazioni di *solfato ferroso* e di *solfato ferrico*.

Ma intanto la scoperta della semplicità del *cloro* avea smossa una delle basi della nomenclatura; non si verificò l'opinione dei suoi fondatori relativamente alla composizione dell'acido muriatico; si ebbero degli acidi senza ossigeno. Allora per un deplorabile sbaglio, benchè sì pochi fossero gli acidi contenenti idrogeno, benchè questo corpo mostrasse piuttosto antagonismo che rassomiglianza coll'ossigeno, e benchè viceversa il cloro tanta analogia avesse con questo acidificante, pure si volle considerare l'idrogeno come un nuovo acidificante, e si creò la classe degli *idracidi*, mentre gli acidi contenenti ossigeno si chiamarono con singolare neologismo *ossiacidi*. Così ebbero origine quelle denominazioni che per varii anni generalmente adottate nocquero alla semplicità della nomenclatura, la allontanarono dalle giuste teorie, e vi sparsero una confusione non ancora tolta del tutto, poichè quelle denominazioni sono ancora, nè saprei dirne il perchè, da non pochi preferite alle altre più razionali.

Riconosciuta ed adottata come principio di nomenclatura l'analogia

tra l'ossigeno, il cloro, l'iodio, il solfo, il cianogeno, ecc., il Berzelius analogamente agli *ossidi* ed agli *acidi* denominò i *cloruri* ed i *cloridi*, i *solfuri* ed i *solfidi*, ecc.; e le varie proporzioni di cloro ecc. contenute in un *cloruro* od in un *clorido*, egli distinse mediante le terminazioni in *oso* ed in *ico* già adoperate per gli ossidi e per gli acidi. Bellissima riforma della nomenclatura, che nello stesso tempo che la accordò colla teoria le diede generalità e semplicità. Se non che parmi che un grave difetto essa contenga; difetto che il suo celebre inventore avrebbe senza dubbio schivato ove l'avesse immaginata tutta in una volta, anzichè creata sotto l'influenza della teoria (se è permesso spiegarmi in tal guisa) dell'*acido muriatico*, e poscia modificata seguendo la teoria del *clorido idrico*. Esporrò il difetto che sembrami avere la nomenclatura del Berzelius con un esempio. Il solfo può combinarsi non solamente coi metalli ma eziandio con qualche ossido, e la prima nomenclatura del Berzelius distingueva ottimamente il *sulphuretum kalii* dal *sulphuretum kalicum*, poichè dal momento che la terminazione in *ico* esprimeva implicitamente la presenza dell'ossigeno, il *solfuro potassico*, non meno del *solfato potassico*, dovea contenere l'*ossido potassico*: ma nella nuova nomenclatura la terminazione in *ico* esprime unicamente la proporzione dell'ossigeno o di un qualunque altro elemento elettro-negativo, sicchè il solfuro di potassio prese il nome di *solfuro potassico*, l'antico *solfuro potassico* (*sulphuretum kalicum*) si dovrebbe chiamare *solfuro di ossido potassico*, e d'altra parte il nome di *solfato potassico* sembrerebbe esprimere la combinazione dell'acido solforico col potassio.

Questa anomalia nel linguaggio arreca confusione nelle due nomenclature del Berzelius, e priva del semplice modo di rappresentare la combinazione di un ossido con un corpo che non sia un acido. Si toglierebbe, a mio credere, l'anomalia se nello stesso modo che il Lavoisier, per esprimere le combinazioni degli acidi in *oso* od in *ico*, cangiò tali desinenze nelle *ito* ed *ato*, così pure gli ossidi in *oso* ed in *ico* nelle loro combinazioni cangiassero di desinenza e prendessero o le stesse *ito ato*, o, il che sarebbe molto meglio, altre due, per esempio *ino ano*. In tal modo i nomi di *solfato potassano* e di *solfuro*

potassano mostrerebbero senza alcun equivoco la presenza dell'*ossido potassico*; ed il *solfuro potassico* altro non potrebbe esprimere che quella combinazione di solfo e di potassio che è analoga all'*ossido potassico*. Nè bisogna che le orecchie dei filologi restino offese da queste insolite desinenze, poichè ciò accade ordinariamente nelle nomenclature scientifiche, ed i nomi già adottati di *solfato ramoso* e di *solfato rameico* non sono molto più grati di quelli di *solfato ramino* e di *solfato ramano* che io proporrei di sostituire. Con questa modificazione la nomenclatura del Berzelius chiaramente esprimerebbe con due sole parole un qualunque composto di due corpi o ambedue binarii, od uno semplice ed uno binario. Molti chimici amano scrivere *acido cloridrico* piuttostochè *clorido idrico*, nel che parmi che abbiano in mira il secondo oggetto della nomenclatura già da me accennato, vale a dire cerchino di esprimere non solo la composizione ma anche la natura del corpo. La particella *cloro*, e le altre analoghe di *solfo* ecc. sono poi indispensabili quando si vogliano nominare i composti del secondo ordine formati dai *cloridi*, dai *solfidi*, ecc. (2). Del resto le leggi della nomenclatura e della etimologia concorrono ad indicare come molto migliore l'espressione di acido *cloridrogenico* oppure di clorido *idrogenico*.

Le terminazioni in *oso ico* pei composti del primo ordine, e quelle in *ito ato* ed in *oso ico* (alle quali ultime io sostituirei quelle in *ino ano*) pei composti del secondo ordine, si trovarono col procedere della scienza troppo scarse al bisogno, poichè parecchi corpi presentano molto più di due gradi di ossidazione o di acidificazione; ed è male invero che i fondatori della nomenclatura non abbiano posto mente a questa possibilità, e non abbiano scelte le desinenze in modo da poterne estendere il numero seguendo un principio sistematico; e che tal cosa fosse facile lo mostrò il Laurent colle sue desinenze in *ase ese ise ose ane ene* ecc. Bisognò adunque denominare i gradi intermedii di ossigenazione mediante le particelle *ipo, iper, sus, sur* preposte al nome del corpo ossigenato, e qualche volta invece al sostantivo *ossido*; e qualche altra volta attenendosi ad un differente principio di nomenclatura la particella *ossi* servì ad indicare il massimo grado di ossigenazione. Così si ebbero gli acidi *iposolforoso, iposolforico* ecc., gli ossidi *susosmioso,*

susosmico ecc., i *surossidi idrico, potassico* ecc., gli acidi *ossiclorico*, *ossimanganico* ecc. Non è piccola causa di confusione che l'accrescimento nella quantità dell'ossigeno venga espresso tanto colla particella *sur* premessa alla parola ossido, quanto con una delle particelle *iper* o *sus* premessa all'aggettivo, sicchè due particelle di opposto significato, quali sono *iper* e *sus*, hanno egual valore, mentre invece la particella *ipo* fa ufficio opposto di *sus*. Gli acidi distinti colla particella *ipo* la conservarono anche nei nomi dei sali da loro formati. La cosa sarebbe più imbarazzante rispetto agli ossidi sopraccennati, se non che pare che essi non entrino in combinazione del secondo ordine. Nei sali poi occorrono nuove particelle per distinguere da quelli che si considerano come neutri gli aciduli ed i basici, e furono adoperate ora *sopra* o *sotto*, ora *bis*, ora *sesqui*, ora *di*, ecc.

Dai cenni finora esposti s'intende non esser sempre facile comprendere pienamente il significato del nome di un sale; si aggiunga che oltre i sali semplici, vi sono i doppii, i tripli, ecc., e che la maggior parte hanno inoltre l'acqua per uno dei loro elementi costituenti; e si vedrà che anche senza entrare nella vastissima chimica degli esseri organici, la nomenclatura o meglio le varie nomenclature l'una all'altra sovrapposte formano un non facile studio particolarmente per chi non si occupi della chimica, ma pur abbia occasione d'intenderne o di adoperarne il linguaggio; e si farà plauso a coloro che tentarono di riformare la nomenclatura e renderla più espressiva ed universale.

E siccome malgrado l'uso di tante desinenze nonchè di tante particelle un nome chimico non sempre offre senza equivoco la vera composizione del corpo, così il principe Luigi Bonaparte propose di compiere la nomenclatura introducendovi delle particelle che esprimessero, mediante la teoria degli equivalenti chimici, la vera composizione del corpo. Più radicale è la riforma della nomenclatura che l'Avogadro ha esposta nel Tomo XXIII delle Memorie della Società Italiana. Egli propone di denominare ogni corpo mediante due parole alla maniera usata dai naturalisti; il nome generico esprimerebbe gli elementi del corpo e sarebbe formato dall'unione di particelle iniziali dei nomi di tali elementi, ed il nome specifico ne stabilirebbe le rispettive pro-

porzioni con numeri che si riferirebbero agli equivalenti chimici. Così l'acqua ossia ossido idrico (H_2O) è da lui chiamato *ossidro semplice*, l'acqua ossigenata ossia *surossido idrico* (H_2O^2) la dice *ossidro doppio* perchè contiene due equivalenti di *ossigeno* per uno d'*idrogeno*: l'acido nitrico che ora per uniformità di linguaggio è detto *acido azotico* (A_2O^5) viene chiamato dall'Avogadro *ossazoto quintuplo*. Il suo *ocarcalcio triplo* contiene tre equivalenti di *ossigeno*, uno di *carbonio* ed uno di *calcio*, sicchè è il *carbonato calcico* ($Ca\,O + C\,O^2 = Ca + C + 3\,O$).

Da questi esempii si vede che l'Avogadro abbandonando del tutto uno dei fini già di sopra notati della nomenclatura, non si cura menomamente nè delle proprietà dei corpi, nè dei modi con cui più facilmente si compongono o si decompongono, e si restringe ad esprimere soltanto l'analisi del corpo. A me sembra che quelle mancanze sieno tali che rendano la proposta nomenclatura insufficiente ed affatto inopportuna. Il nome di *osfosferro semi-dodeplo-triplo* indicherà benissimo che il corpo contiene dodici equivalenti di *ossigeno* ($12\,O$) tre di *solfo* ($3\,S$) e due di *ferro* ($2\,Fe$) e chi è alcun poco istrutto nella scienza scorgerà in ciò tutti i componenti del *solfato ferrico* ($Fe^2O^3 + 3\,S\,O^3$); ma quel primo nome c'indicherà forse che il corpo nasce immediatamente combinando l'*ossisolfio triplo* coll'*ossiferro semitriplo*, appunto come il secondo nome ci mostra i componenti immediati *acido solforico* ($S\,O^3$) e *ossido ferrico* ($Fe\,O^{\frac{3}{2}}$)? Il nome di *osfosferro semi-dodeplo-triplo* ci fa forse conoscere se il corpo sia un sale neutro od acidulo, e c'insegna forse quale reazione nascerà unendolo coll'*ossipoto semplice*? Parmi che se la nomenclatura dell'Avogadro venisse adottata bisognerebbe ad ogni momento sostituirvi, o mediante parole o mediante segni, altre espressioni corrispondenti almeno in parte alle nomenclature finora adoperate dai chimici. Si potrebbe rispondere che per esempio tutto quello che sappiamo di certo sul *solfato ferroso* ($Fe\,O + S\,O^3$) si è che esso contiene quattro equivalenti di ossigeno, uno di solfo ed uno di ferro, il che benissimo si esprime chiamandolo *osfoferro quadruplo*; e che del resto è soltanto un'ipotesi, un modo di vedere e non una realtà, considerarlo composto di acido solforico ($S\,O^3$) e di ossido ferroso ($Fe\,O$), poichè forse con altrettanta ragione lo si potrebbe considerare come ri-

sultante dalla combinazione del solfuro ferroso ($Fe\,S$) coll'ossigeno ($4\,O$): così anche per lo stesso acido solforico ($S\,O^3$) vi sarebbero buone ragioni per considerarlo come una combinazione di ossigeno e di acido solforoso ($S\,O^2$) piuttostochè di ossigeno e di solfo. Ma questi in ogni caso sarebbero motivi per desiderare che la nomenclatura potesse prestarsi alle varie maniere di considerare questi composti, non mai valide ragioni per rendere la nomenclatura affatto inetta ad esprimere la formazione e le proprietà dei corpi.

Il chimico Selmi considera nei metalli quattro gradi di ossidazione secondo che un equivalente di metallo si unisce ad uno, due, tre, o quattro semi-equivalenti di ossigeno; egli indica i due primi ossidi colle solite desinenze *oso*, *ico*, che egli adopera rispettivamente anche pel terzo e pel quarto, ma questi invece di chiamarli ossidi li dice *amfiossidi* oppure *sovrossidi*: sono *amfiossidi* quelli che possono combinarsi o cogli acidi o con altri ossidi, e nei nomi dei loro composti essi conservano la particella *amfi*; e sono *sovrossidi* quelli che non possono combinarsi senza prima cangiare la propria quantità d'ossigeno. Questa modificazione della nomenclatura mi sembra molto razionale, perchè, quando essa fosse adottata, dal nome di un ossido si conoscerebbe senza equivoco la sua composizione; ed inoltre si avrebbe una importante nozione sulla sua attitudine a formar un composto del secondo ordine. Ed io credo che la nomenclatura chimica richiegga parecchie altre di queste modificazioni valevoli ad esprimere qualche proprietà dei corpi specialmente in riguardo al modo con cui si ottiene un composto, ai prodotti della sua decomposizione ed ai successivi composti ch'esso può originare. Ed a rendere più imperiosa la necessità che il nome esprima qualche cosa più della composizione, concorre il numero sempre crescente di corpi *isomerici* e di *allotropici* che si vanno scoprendo; vale a dire uno stesso corpo semplice si presenta dotato di differentissime proprietà, e sembra che talvolta esso conservi tale differenza anche nei composti che lo contengono. Inoltre vi sono dei composti che quantunque formati degli stessi principii nell'identico stato allotropico, pure hanno differenti proprietà e si dicono perciò *isomerici*; il distinguere i varii stati allotropici con

una lettera greca mi sembra cosa poco opportuna, perchè non offre i vantaggi del linguaggio parlato e non presenta alcuna distinta idea. Ecco adunque largo campo pei futuri riformatori della nomenclatura: oltracciò i differenti modi di considerare le composizioni dei corpi difficilmente possono rendersi chiari senza cangiare di conformità la nomenclatura; sicchè stabilire una nomenclatura invariabile sarebbe in qualche modo voler impedire i cangiamenti ed i miglioramenti delle teorie. E chi pur volesse render invariabile la nomenclatura, lo potrebbe egli forse?

Dopo tutte queste mie parole si attenderà forse che io creda di avere scoperto un qualche mirabile ripiego che valga a conseguire uno scopo circondato da tante difficoltà, e quando avrò palesato il mio pensiero si avrà ragione di meravigliare che io proponga una cosa tanto ovvia e tanto nota; parmi nulladimeno che sia non piccolo pregio della mia idea l'essere eseguibile, mentre la nomenclatura, per esempio, dell'Avogadro potrebbe essere per se stessa la cosa più utile del mondo che tanto e tanto io riterrei che non sarebbe mai adottata: non può avere la speranza e direi anche il diritto di cangiare da capo a fondo tutta una nomenclatura scientifica se non chi ha scoperto nuovi ed importanti principii su cui appoggiarla. È facile architettare una nomenclatura, particolarmente se non si tratti che di esprimere colle parole alquanti numeri, ma è difficilissimo persuadere i chimici ad adottarla. Perciò bisogna di necessità attenersi alla nomenclatura già esistente, e soltanto mediante piccole e successive modificazioni potrà esser tenuta in accordo colle dominanti teorie: ma come schivare gli equivoci nell'uso di nomi non sufficientemente espressivi, e che di mano in mano si vanno modificando? Come conoscere con sicurezza la composizione espressa da un nome che non contiene numeri? Ora, io rifletteva, vi sono delle scienze, il cui linguaggio è almeno in parte destinato esclusivamente piuttosto per gli occhi di quello che per gli orecchi; così per esempio nella mineralogia le forme dei cristalli possono imperfettamente accennarsi colle voci, e non si esprimono esattamente che con figure e con ispeciali formule. In egual modo nella nomenclatura chimica si lasci pure il nome parlato, chè un tal linguaggio è tanto co-

modo e quasi ideologicamente necessario; ma aggiungiamovi sempre il segno chimico, il quale ci presenterà l'esatta composizione, e sarà anche modificabile a norma delle varie teorie intorno alla composizione dei corpi senza nulla perdere della propria chiarezza. Il mio progetto si riduce adunque a due parole: Non iscrivere mai il nome di una sostanza chimica senza accompagnarlo col suo segno. Adottato che fosse questo uso, la nomenclatura potrebbe migliorarsi o divenendo più razionale, od estendendosi ad esprimere alcune proprietà dei corpi senza nessun timore che tali modificazioni cagionassero oscurità od equivoco, poichè il segno chimico sarebbe sempre pronto a togliere ogni dubbio. Al contrario se, per esempio, alcuni chimici adottino la nomenclatura del Selmi e non vi aggiungano il segno chimico, come sapremo d'ora innanzi se un *ossido manganico* sia quello del Berzelius con un equivalente e mezzo di ossigeno, o quello del Selmi che ne contiene uno solo? Senza segni chimici ogni modificazione di nomenclatura, sia pur essa razionale, è causa di confusione; coi segni chimici ogni perfezionamento della nomenclatura è conciliabile colla piena conoscenza della composizione dei corpi, la quale forma per certo il carattere più essenziale delle chimiche combinazioni.

Vantaggiosissima sarebbe l'introduzione dei segni chimici anche nelle opere di fisica, o in tutte quelle altre nelle quali occorre di nominare un composto chimico; quante volte non si vede nominato un acido, un ossido, un sale e o non si può sapere precisamente quale esso sia, o, molto più spesso, non si sa qual peso se ne debba prendere, ignorandosi qual proporzione d'acqua esso debba contenere? Giacchè negli acidi, negli alcali e nei sali entra spessissimo l'acqua come elemento costituente senza che la nomenclatura chimica la esprima con precisione. Inoltre generalizzato l'uso dei segni chimici, si può dire che sarebbe generalizzata la conoscenza di alcune fondamentali leggi della chimica: quel linguaggio di segni che è facilissimo da apprendere pone sott'occhio le principali circostanze di composizioni e di decomposizioni, fa distinguere i due elementi elettro-positivo ed elettro-negativo, insegna la teoria degli equivalenti chimici, ecc.

Ma perchè i segni sieno scevri di qualunque dubbiezza, bisogna

che essi sieno stabiliti in maniera immutabile, mentre sfortunatamente anche coi segni i chimici non parlano tutti lo stesso linguaggio: e questa sarebbe cosa che vorrei da qualche autorevole chimico solennemente raccomandata, poichè perduta una volta l'uniformità nei segni non credo che rimarrebbe finalmente altro modo sicuro di esprimere la composizione chimica oltre quello di darne l'analisi numerica. Che se invece si stabilisca e si conservi l'uniformità dei segni, credo che il loro uso sarà o presto o tardi una necessità da tutti sentita. Pure anche nel rendere immutabile il significato dei segni chimici bisogna lasciar modo di modificarli in guisa che possano accomodarsi alle varie teorie; poichè il segno è tanto connesso colla teoria, che se quello stabilito non si accordi colla teoria preferita da un qualche chimico, questi sarà quasi suo malgrado indotto a cangiare il segno. Ecco come io crederei si potesse conciliare l'immutabilità e sicurezza del segno coi cangiamenti che qualche chimico potrebbe desiderare di praticarvi.

È noto che una lettera maiuscola o sola o seguita da una minuscola è il segno che rappresenta ciò che suol chiamarsi un *atomo* di un corpo semplice; vorrei che questi segni fossero precisamente quelli adottati dal Berzelius nel suo Trattato di chimica. Qualunque autore peraltro che preferisse di dare all'equivalente chimico un valore multiplo o summultiplo del predetto atomo lo potrebbe fare, purchè lo segnasse colle lettere usate dal Berzelius ponendovi a destra abbasso il numero pel quale egli intendesse moltiplicare o dividere l'atomo del Berzelius; questo numero sarebbe *arabo* pei multipli e *romano* pei summultipli, e tal numero formerebbe insieme colle lettere un solo segno; sicchè poscia questo segno complesso riceverebbe quei moltiplicatori che si sogliono scrivere o nel luogo degli esponenti algebraici o nel luogo dei coefficienti secondo le regole a tutti note.

Esempii. Esprimendo con $O = 8$ l'atomo dell'ossigeno, gli atomi dell'idrogeno, dell'azoto, del carbonio, del silicio sono secondo il Berzelius $H = 0{,}5$, $A = 7$, $C = 6$, $Si = 22$; ma sarà lecito a chiunque di preferire invece alcuno dei segni $H_2 = 1$, $A_2 = 14$, $C_{II} = 3$, $C_2 = 12$. $Si_{III} = 7{,}33$, od altri formati ad arbitrio mediante moltiplicatori espressi da numeri arabi o divisori espressi da numeri romani. Così l'acqua

si potrà rappresentare con H_2O o con $\dot{H}_2$ piuttostochè con H^2O, e l'ossido azotico con $A_2O^2 = \ddot{A}_2$ anzichè con $\dot{A}$; l'acido carbonico si potrebbe rappresentare con $\overset{..}{\ddot{C}}_2$ invece che con $\ddot{C}$, il che indicherebbe che i carbonati neutri fossero quelli espressi da $\dot{\square}\overset{..}{\ddot{C}}_2$, e che gli ordinarii $\dot{\square}\ddot{C}$ fossero invece sotto-carbonati espressi da $\dot{\square}^2\overset{..}{\ddot{C}}_2$. L'acido silicico è espresso dal Berzelius con $\dddot{Si}$, ma se si voglia per maggior comodità, specialmente nella mineralogia, ridurlo a contenere un solo equivalente di ossigeno lo si scriverà così $\dot{Si}_{III}$: similmente l'allumina, che il Berzelius esprime con un segno corrispondente al nostro $\dddot{Al}_2$, potrà segnarsi con $\dot{Al}_{2III}$, indicando con Al_{2III} i due terzi dell'atomo $Al = 14$. Per la piena intelligenza di questi segni si osservino gli esempii $\dot{H}^3_2 = 6\,H + 3\,O$, $6\,\dot{Si}_{III} = 2\,Si + 6\,O$, $\dot{Al}_{2III}\dddot{S} + 7\,\dot{H}_2 = (\frac{2}{3}\,Al + O) + (S + 3\,O) + 7\,(2\,H + O)$.

Ho già detto che stabilito una volta l'uso costante dei segni ogni nomenclatura diviene intelligibile, ed è tolto qualsiasi pericolo di confusione: così i chimici potrebbero meglio e più speditamente rappresentare la loro maniera di considerare la composizione dei corpi schivando i due pericoli di sopraccaricare la scienza di nuovi nomi, o di adoperare in nuovo significato un nome già vecchio. Siami permesso arrestarmi un poco su questo argomento, e così anche mostrare i vantaggi delle due terminazioni in *ino ano* che io proporrei per gli ossidi in *oso ico* quando entrano in un composto del secondo ordine. L'ossido azotico ($\ddot{A}_2$) si unisce ad alcune basi facendo l'ufficio di elemento elettro-negativo, tali combinazioni furono dette *azotati*; ma presentemente questo nome è adoperato dalla maggior parte dei chimici per indicare quei sali che con grande anomalia di linguaggio si dicevano *nitrati*. Così le combinazioni dell'acido azotico ($\overset{..}{\dddot{A}}_2$) avrebbero lo stesso nome di quelle dell'ossido azotico ($\ddot{A}_2$); io darei a queste ultime il nome di *azotani*, adoperando le desinenze in *ino ano* anche come sostantivi; appunto come viceversa le desinenze in *ito ato* si adoperano anche come aggettivi, dicendosi: *calce carbonata, acido solforico idrato*, ecc. Il corpo elettro-negativo darà, generalmente parlando, il sostantivo, e l'elettro-positivo l'aggettivo. Così si direbbe *azotano potassano* ($\dot{K}\ddot{A}_2$), *azotano sodiano* ($\dot{N}a\ddot{A}_2 + \dot{H}_2$) ecc. Chi ritenga

che il *clorido idrogenico* ($H_2 Cl_2$) possa combinarsi ad una base, per esempio all'*ossido calcico* ($\dot{C}a$), senza che nasca la doppia decomposizione in *cloruro calcico* ($Ca Cl_2$) ed in acqua ($\dot{H}_2$), potrà denominare quel composto dicendolo *cloridrogenato calciano* ($\dot{C}a H_2 Cl_2 + 6 \dot{H}_2$). Nei cloro-sali un clorido si unisce con un cloruro, perciò la particella *cloro* si porrebbe tanto al sostantivo quanto all'aggettivo. Esempii: *cloridrogenato cloroplatinino* ($Pt Cl_2 + H_2 Cl_2$), *cloroplatinino cloropotassano* ($K Cl_2 + Pt Cl_2$), *cloroplatinano cloropotassano* ($K Cl_2 + Pt Cl_2^2$), supponendo che i due cloruri di platino si dicano, analogamente ai due ossidi, *cloruro platinoso* ($Pt Cl_2$) e *cloruro platinico* ($Pt Cl_2^2$); che se invece si chiamassero *cloruro platinico* ($Pt Cl_2$) e *clorido platinico* ($Pt Cl_2^2$), le combinazioni del primo si direbbero *cloroplatinani*, e quelle del secondo *cloroplatinati*.

Pare che anche l'azoto abbia la proprietà, come di basificare l'idrogeno, così di formare qualche componente elettro-negativo: per es. il Dumas ammette che l'azoturo aurico ($Au^2 A_2$) si combini coll'azoturo d'idrogeno ($H_2^3 A_2$), e formi quello che noi diremo *azotaurano di ammoniaca* ($H_2^3 A_2 + Au^2 A_2$). Talvolta, anzichè i due componenti abbiano lo stesso elemento elettro-negativo, hanno invece comune l'elemento elettro-positivo: per esempio secondo Rose esiste il *cloromercuriato solfomercurino* ($2 Hg S + Hg Cl_2$), considerando il sublimato corrosivo ($Hg Cl_2$) piuttosto come un clorido, che un cloruro. La nostra nomenclatura si presterebbe spontaneamente anche ad altre teorie; così seguendo il Persoz che considera l'acido solforico ($\dddot{S}$), l'acido iposolforoso ($\dot{S}$), ecc. come composti di acido solforoso ($\ddot{S}$) si avrebbe l'*acido solfito* ($\ddot{S} O = \dddot{S}$), il *solfido solfito* ($\ddot{S} S = 2 \dot{S}$), e così pure il *clorido solfito* ($\ddot{S} Cl_2$) ecc. Questo ultimo composto potrebbe del resto anche chiamarsi *acido clorossisolforico* ($S Cl_2 O^2$), appunto come si ha l'*acido clorossicarbonico* ($C Cl_2 O$), e l'*acido clorossiazotico* ($A_2 Cl_2 O^4$), che così chiamerei l'acqua regia, piuttostochè *acido clorossinitroso*; poichè colla desinenza in *ico* vorrei fosse indicato che in essa si trasforma l'*acido azotico* ($A_2 O^5$), quando ad un equivalente di ossigeno se ne sostituisce uno di cloro. Finalmente, se il *solfato ferrino* ($\dot{F}e \dddot{S}$) lo si volesse considerare come una combinazione di *solfuro ferroso*

(Fe S) e di ossigeno, lo si chiamerebbe *ossido solfoferrino* (Fe S + + 4 O).

I segni chimici li vorrei invariabilmente stabiliti quali sono dati dal Berzelius, poichè, dovendosi fare una scelta, è ben conveniente di attenersi a ciò che fu preferito da questo insigne chimico, che sì luminosamente promosse la teoria delle proporzioni determinate. In quanto ai valori numerici da attribuirsi a tali segni, essi possono cangiare per tre motivi; o per più accurate analisi che modifichino i valori già ritenuti, o per una differente scelta di unità, o per una teorica moltiplicazione o summultiplicazione dell'equivalente. Ho già notato che questa terza determinazione sarebbe da lasciarsi all'arbitrio di ogni autore, purchè col numero posto abbasso della lettera s'indichi qual multiplo o summultiplo dell'atomo del Berzelius siasi assunto per equivalente. Accennerò più sotto alcune ragioni che mi hanno persuaso a preferire gli equivalenti quali si veggono esposti nell'unita Tavola I. Riguardo alla scelta delle unità, è ben evidente che essa è arbitraria; ma credo che si abbia un notevole vantaggio pratico nel porre lo equivalente dell'ossigeno eguale ad 8 anzichè ad 1, o a 10, o a 100: e si noti bene che io dico l'ossigeno $O = 8$, non già l'idrogeno $H_2 = 1$, poichè è l'ossigeno che dev'essere espresso da un numero semplice ed invariabile, non già l'idrogeno che entra in minori composti, e la cui determinazione è più difficile. Sono già molti anni che il Prout asserì che, se pongasi $H_2 = 1$, sarà esattamente $O = 8$, e tutti gli altri equivalenti saranno pure espressi da numeri interi. Questa singolare supposizione, che, nell'ignoranza in cui siamo intorno alla natura dei corpi, non si saprebbe a qual fondamento appoggiare, fu sostenuta dal Thompson, ma al contrario fu fortemente impugnata dal Berzelius. Bisogna però confessare che i lavori analitici degli Erdmann, Marchand, Dumas, Stas, Boussingault, Salvetat, ecc. intorno ai pesi atomici dell'idrogeno, del carbonio, dell'azoto e di molti altri corpi semplici tornarono quasi tutti in conferma della supposizione del Prout: anche il Marignac trova che da tanti fatti è confermata questa teoria; solo gli sembra che vi faccia eccezione il cloro, e che il peso di questo sia $Cl_2 = 35\frac{1}{2}$, cioè multiplo del mezzo equivalente d'idrogeno, eccezione

che, quantunque sia vera, non toglierà per certo il molto vantaggio che si trova nell' adoperare dei piccoli numeri piuttostochè delle lunghe decimali. Nella Tavola I mi sono ingegnato di porre accanto ai pesi atomici ammessi dal Berzelius quelli trovati in questi ultimi anni da varii chimici; questa tavola non è per altro che un saggio di ciò che potrebbe divenire se alcuno dei chimici che leggeranno questo mio scritto, volesse essermi cortese dei dati che avrà raccolti dalle tante Opere e Memorie che tuttodì si vanno pubblicando. Da questo saggio si potrà scorgere quante discrepanze vi sieno nelle analisi chimiche; pare che ben di rado possa contarsi sopra un'approssimazione spinta fino al millesimo del peso totale; cosicchè fa meraviglia che il Berzelius abbia creduto opportuno di esprimere l'equivalente dell'ossigeno con 10000, e poscia con 100000, e qualche volta spingere il calcolo anche più oltre. Altri chimici o fisici seguono un simile uso di calcolare i valori medii con molte più decimali di quelle che possono presumibilmente ritenersi esatte: quanto non è inutile e ridicolo tener conto dei millesimi quando probabilmente sono fallaci anche i decimi! Sommamente lodevole fu per lo contrario la deliberazione della R. Accademia di Monaco, la quale proponendo a premio la determinazione degli equivalenti chimici del solfo, del ferro e del rame, richiese che sieno inoltre determinati i limiti di sicurezza e i più verosimili valori giusta il metodo dei minimi quadrati. Se questo saggio consiglio fosse sempre seguito dai chimici e dai fisici, quanti numeri composti di cinque o sei cifre si vedrebbero ridotti a due o tre soltanto, e quanto più giuste idee si acquisterebbero sull'approssimazione dei trovati risultamenti!

Sarebbe pure, a mio credere, cosa vantaggiosissima, che più spesso si pubblicassero e ritenessero le immediate risultanze delle sperienze, anzichè correggerle a norma della teoria: furono formate molte tavole analitiche, le quali invece d'essere lavoro di un chimico lo sono di un aritmetico, nè vi si può distinguere le conseguenze di effettive sperienze dalle determinazioni puramente teoriche; e se avvenga che si debba mutare qualche equivalente, non si sa più come procedere nella correzione delle tavole; poichè, mancando le originali sperienze, non si

vede quali modificazioni debbano farsi negli altri equivalenti. Nell'analisi delle sostanze provenienti dai corpi organizzati s'incontrano non piccole incertezze, particolarmente in forza dei cangiamenti nei pesi degli equivalenti chimici. Ci serva di esempio lo zucchero di canna cristallizzato: l'analisi dei Gay-Lussac e Thenard dà con bastante approssimazione 12 equivalenti di carbonio ed 11 di ossigeno, ma l'idrogeno invece di esservi compreso per 11 equivalenti vi entra per 12,2: l'analisi del Berzelius darebbe 13 equivalenti di carbonio, 12 di ossigeno e 12,4 d'idrogeno, nondimeno il Berzelius si accorda col Liebig nel ritenere che l'idrogeno vi entri nella giusta proporzione per formare l'acqua. Ma l'analisi del Liebig dava 14 equivalenti di carbonio e 13 di acqua, quella del Berzelius come sopra corretta dava 13 di carbonio e 12 di acqua: pure per accordarsi col peso che si vuol dare all'equivalente dello zucchero lo si ritiene composto di 12 di carbonio ed 11 di acqua ($H_2^{11} C^{12} O^{11}$) come dall'analisi del Gay-Lussac e Thénard, trascurato peraltro quel grave eccesso d'idrogeno. Ora è noto che per le recenti sperienze dei Dumas, Stas, Erdmann e Marchand il peso dell'equivalente del carbonio adottato dal Berzelius dev'essere diminuito nell'esorbitante rapporto di 33 a 32 (dico esorbitante in confronto dei cento-millesimi di cui suol tener conto il Berzelius). Con questo nuovo dato, e purchè esso non influisca a cangiare i risultamenti delle esposte analisi, quella di Gay-Lussac e Thénard dà 10 equivalenti di carbonio e 9 d'acqua e non più 12 ed 11; quella del Berzelius 11 e 10 e non più 13 e 12; quella del Liebig 12 e 11 e non più 14 e 13. Quantunque questo ultimo risultamento ($H_2^{11} C^{12} O^{11}$) ponga in buon accordo l'analisi del Liebig (la sola in cui l'idrogeno non sia in eccesso) col peso dell'equivalente dello zucchero, e con quello del carbonio già anticamente adottato dai Prout, Thompson, ecc. ed ora confermato; nulladimeno non si può non meravigliare che in tanta discrepanza d'analisi si voglia tener conto di minime frazioni: nè si potrebbe negare che quando si adopera tanta larghezza nella interpretazione delle analisi, e si ammette che il numero degli equivalenti possa giungere e sorpassare la ventina, qualunque sorta di miscuglio potrebbe sempre rappresentarsi mediante gli equivalenti chimici. Sicchè

non sarebbe affatto senza appoggio l'opinione, che nei composti provenienti dai corpi organizzati sia ancora dubbioso se abbia sempre luogo o no la teoria degli equivalenti chimici.

Lasciando che per mezzo di ulteriori sperienze sieno fissati con sempre maggior approssimazione i pesi degli equivalenti chimici, e probabilmente confermata la bellissima supposizione del Prout, ci resta da scegliere questi equivalenti nel modo più conforme alle adottate teorie, ed alle relazioni che sembrano esistere fra tali equivalenti ed alcune delle proprietà dei corpi. Vi sono motivi di più specie per preferire una determinazione ad un'altra: fra questi mi sembrano più forti quelli che dipendono dalle leggi delle sostituzioni, ed in generale delle analogie o nelle proprietà o nel modo di composizione, ecc. dei varii composti, nei quali un corpo sembra essersi ad un altro sostituito. Così, giacchè O si sostituisce a 2 H, ed a H si sostituisce Cl, Br, I, io prendo nella mia tavola per equivalenti O, H_2, Cl_2, Br_2, I_2; il che si accorda eziandio colla corrispondenza fra molti cloruri metallici ed i corrispondenti ossidi, che contengono tante volte O quante i primi contengono Cl_2, ecc.; e così pure colla corrispondenza fra gli acidi carbonico ($C O^2$) e clorossicarbonico ($C Cl_2 O$) ecc., nei quali il Cl_2 sembra tener luogo di O. Non veggo perchè il Dumas abbia preso per equivalente del carbonio $C_{II} = 3$, sicchè allora l'acido carbonico sarebbe $C_{II} O$; perciò io ritengo per equivalente il solito C. Appartengono alle leggi delle sostituzioni anche quelle che riguardano l'isomorfismo, ed è quindi conveniente di scegliere gli equivalenti in modo che i corpi composti isomorfi sieno espressi da segni composti nello stesso modo. Così l'isomorfismo tra gli ossidi ferrico ($Fe^2 O^3$), manganico ($Mn^2 O^3$), cromico ($Cr^2 O^3$) ed alluminico fa adottare per questo ultimo il segno $Al^2 O^3$, anzichè l'altro $Al_{2III} O$, adoperato dal Thompson forse per analogia colle altre terre. Sono pure isomorfi alcuni composti di Pb, $\dot{Ba}$, $\dot{Sr}$, e lo sono pure $\dot{Fe}$, $\dot{Mn}$, $\dot{Ca}$, $\dot{Mg}$; e l'isomorfismo tra $\dddot{Sb}_2$ ed $\dddot{As}_2$, e tra $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{A}s_2$ e $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{P}_2$ fa adottare anche per questi corpi dei segni analoghi invece di quelli del Thompson $\dot{Sb}_{2III}$, $\ddot{As}_{4III}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot}{A}_{6V}$, $\ddot{P}_{4V}$. Non vi sarebbe ragione per raddoppiare anche gli atomi Fe, Mn, Cr, Al, cioè prendere per equivalenti Fe_2, Mn_2, Cr_2, Al_2: e qui avverto che per togliere ogni confu-

sione, quando una volta un chimico abbia adottato l'equivalente Fe, non dovrebbe mai servirsi del segno Fe_2, bensì del Fe^2. L'isomorfismo tra il solfuro rameoso (Cu^2S) ed il solfuro d'argento (AgS) suggerisce di dimezzare l'equivalente dell'argento $Ag = 108$, e ridurlo ad $Ag_{II} = 54$; sicchè il precedente solfuro ($Ag^2_{II}S$) si dica argentoso, e tali sieno pure l'ossido ($Ag^2_{II}O$) ed il cloruro ($Ag^2_{II}Cl_2$) analoghi ai simili composti del mercurio (Hg^2O, Hg^2S, Hg^2Cl).

Parmi che un altro motivo per preferire l'una all'altra determinazione degli equivalenti sia la capacità di saturazione degli acidi, essendo una regola molto comoda che in ogni sale neutro tanti sieno gli equivalenti di ossigeno contenuti nella base, quanti gli equivalenti del radicale contenuti nell'acido; non bisogna però dimenticare che molti dubbii possono rimanere sulla vera neutralità dei sali. Mediante questa legge gli acidi che hanno per radicale l'idrogeno (H_2S, H_2Cl_2, ecc.) indicano che si prenda per equivalente dell'idrogeno H_2, ed i clorati, gli azotiti e gli azotati indicano che sieno equivalenti i Cl_2, A_2. Gli ossalati ($\dot{\square} + C^2O^3$) indicherebbero di prendere C^2 per equivalente del carbonio, al che si accorderebbero molti carbonati potendosi considerare come neutro piuttosto il *bicarbonato potassano* ($\dot{K}\ddot{C}^2$) che il *carbonato* ($\dot{K}\ddot{C}$) (in tal caso questi due sali si scriverebbero così $\dot{K}\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{C}_2$, $\dot{K}^2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{C}_2$); ma il *carbonato calciano* ($\dot{Ca}\ddot{C}$) induce a conservare per equivalente il semplice C. Fanno eccezione alla regola i fosfati ($\dot{\square}^2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{P}_2$), i fosfiti ($\dot{\square}^2\overset{\cdot\cdot\cdot}{P}_2$), gli arseniati ($\dot{\square}^2\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{As}_2$); ed invece sono conformi alla regola i cromati ($\dot{\square}\dddot{Cr}$). Nei silicati l'ossigeno della silice talvolta è la metà di quello della base, talvolta è uguale. talvolta è doppio, forse più spesso è triplo, perciò può ritenersi per l'acido silicico il segno $\dddot{Si}$. Gli iposolfiti talvolta sono $\dot{\square}\dot{S}$, talvolta $\dot{\square}\dot{S}^2$, e talvolta $\dot{\square}\dot{S}^3$; nel secondo caso si potrebbe considerare l'acido iposolforoso (SO) come un acido solfossisolforico ($S + O^2S$), cioè considerarlo come acido solforico (SO^3), nel quale un equivalente di ossigeno siasi convertito in uno di solfo; ma d'altronde anche gli iposolfati ($\dot{\square} + S^2O^5$) fanno eccezione alla regola sopra espressa.

La densità dei corpi nello stato aeriforme sembra a primo aspetto essere un mezzo sicuro per togliere ogni ambiguità nella determina-

zione degli equivalenti chimici; nulladimeno parmi si debba aver più riguardo ai due motivi precedenti che hanno una maggior importanza chimica. D'altronde pochi sono i corpi semplici che si hanno in istato di gas o dei quali si può determinare con precisione la densità dei vapori; e riguardo ai gas composti, le loro densità non possono servire a determinare gli equivalenti dei componenti, perchè non si sa quali condensazioni essi possano aver subito. D'altra parte finchè si ammetteva che i fluidi aeriformi fossero tutti ugualmente compressibili, e tutti all'aumentar della temperatura egualmente dilatabili, si poteva credere rigorosamente esatta la legge così detta dei volumi. e la densità dei gas poteva servire a determinare gli equivalenti chimici; ma essendosi riconosciuto che alcuni gas disugualmente si dilatano, ne viene che quella legge non può essere generalmente esatta, restando ignota la temperatura e l'esterna pressione sotto le quali dovrebbe prendersi la densità dei fluidi aeriformi. Ho riunito nella Tavola II i dati che mi avvenne di trovare intorno alla densità dei fluidi aeriformi, escludendo per quanto mi fu possibile le densità che non furono osservate, ma soltanto calcolate, poichè esse non potevano in alcun modo servire al mio scopo di porre a confronto tali densità coi pesi degli equivalenti, per vedere quanto sia probabile la teoria dei volumi, e qual partito se ne possa trarre per la determinazione degli equivalenti chimici. Si vede dalla Tavola II che gli equivalenti H_2 Cl_2 Br_2 I_2 A_2 C Hg da me adottati corrispondono colle densità dei rispettivi fluidi aeriformi, e che soltanto si deve raddoppiare l'equivalente dell'ossigeno. Osservando le due colonne dei rapporti, i quali dovrebbero essere l'uno costantemente **0,0690**, l'altro costantemente **0,0896**, si scorge quante discrepanze vi sieno nelle densità osservate per un medesimo gas, e quali modificazioni tali densità indurrebbero a fare negli equivalenti chimici. Così la densità del gas idrogeno determinata da Biot ed Arago darebbe $H_2 = 1{,}06$, invece quella di Berzelius e Dulong darebbe $H_2 = 0{,}997$, e quella più recente del Regnault darebbe $H_2 = 1{,}002$; si potrà ritenere con molta confidenza $H_2 = 1$. La densità del clorido idrogenico (H, Cl_2), come anche una delle sperienze riguardo al cloro, darebbe

$Cl_2 = 35,1$, ma altra sperienza dei Gay-Lussac e Thénard darebbe $Cl_2 = 35,8$; si potrà attenersi a $Cl_2 = 35,5$ come fu notato anche nella Tavola I. Il bromo dovrebbe alcun poco aumentarsi e l'iodio diminuirsi; sicchè si rende molto probabile che l'equivalente del bromo sia precisamente medio fra quelli dei due corpi tanto ad esso affini il cloro e l'iodio, come osservò il Doebereiner. Egli notò pure che la stessa cosa ha luogo rispetto al selenio tra il solfo ed il telluro, rispetto allo stronzio tra il litio ed il potassio; e forse sono altri due simili gruppi quello del ferro col manganese e cromo, e quello dell'osmio coll'iridio e platino. Continuando l'esame delle esposte densità dei gas i composti del solfo mostrano quanto poco si possa contare su questa maniera di determinare gli equivalenti, a cagione delle grandi differenze che si osservano. I composti dell'azoto darebbero all'incirca $A_2 = 14,2$, il che si accorderebbe col valore adottato dal Berzelius (veggasi nella Tavola I). I numeri ora troppo grandi, ora troppo piccoli corrispondenti ai composti del carbonio non danno alcuna spinta a cangiare il $C = 6$, quantunque Redtenbacher e Liebig non trovassero che $C = 6$ si potesse accordare colla densità del gas acido carbonico ($\ddot{C}$). Le più recenti sperienze del Regnault sui pesi specifici dei gas ossigeno ed acido carbonico a 0.° e $0^m,76$ darebbero $C = 6,12$; ma egli osservò che diminuendo la pressione il secondo gas si espande più del primo, sicchè ad una pressione alquanto maggiore del quarto della atmosferica la densità del gas acido carbonico sarà forse 1,5202 precisamente quale risulta da $C = 6$, ed è probabile che la maggior compressione del gas a 0.° e $0^m,76$ dipenda dall'avvicinarsi esso al punto della sua liquefazione.

Un altro mezzo per togliere il dubbio, che le considerazioni chimiche lasciano nella scelta dei multipli o summultipli degli equivalenti, può desumersi da quella singolare legge scoperta dai Dulong e Petit, per la quale gli equivalenti dei corpi semplici od almeno dei metalli hanno la medesima capacità pel calorico. Il Regnault confermò questa legge, e la estese anche a ciascuna classe dei corpi composti che abbiano la stessa composizione atomica e una simile costituzione chimica; peraltro egli la trova soltanto approssimata, ed ac-

cenna come cause delle osservate irregolarità la differente costituzione fisica, il polimorfismo, lo sviluppo di calorico latente, ecc. Moltissime sono le osservazioni del Regnault, e quantunque sia pur vero che alcune egli ne escluda perchè troppo dalle altre discordanti, e che quelle ritenute presentino fra di loro delle sensibili differenze, nulladimeno non si può dubitare che la capacità pel calorico non dipenda dal peso dell'equivalente chimico, sicchè tanto pei corpi semplici quanto per quelli di una analoga composizione ogni equivalente abbia approssimatamente la medesima capacità pel calorico; così per esempio 16 grammi di solfo ($S = 16$), 28 di ferro ($Fe = 28$), 30 di cobalto o di nickel, 32 di rame o di zinco, 54 di argento ($Ag_{II} = 54$), 59 di stagno, 64 di telluro, 64,5 di antimonio ($Sb_2 = 129$), 99 di platino o di oro, 101 di mercurio, 104 di piombo, 106 di bismuto hanno presso a poco la stessa capacità pel calorico che è quella di circa 3,2 grammi di acqua. Si vede perciò che anche la considerazione dei calorici specifici induce a dimezzare l'atomo chimico dell'argento ammesso dal Berzelius ($Ag = 108$); lo stesso dovrebbe farsi anche per gli atomi o equivalenti di sodio ($Na = 23$) e di potassio ($K = 39$); ma altre considerazioni chimiche possono consigliare a ritenere Na, K, per serbare l'analogia di composizione fra le terre e gli alcali: dissi già per quali ragioni credetti di raddoppiare l'atomo dell'antimonio prendendo per equivalente $Sb_2 = 129$, anzichè il semplice $Sb = 64,5$ che sarebbe indicato dalla capacità pel calorico. Questa capacità farebbe pur presumere che l'equivalente del carbonio fosse $C_2 = 12$, ma le sperienze sulle varie specie di carbone e sul diamante sono molto discordi, e si potrà ritenere il semplice C, quantunque anche delle ragioni chimiche fossero favorevoli al doppio C_2. Il Regnault trova anche troppo grande l'atomo dell'urano $U = 217$ dato dal Berzelius, e crederebbe necessario di ridurlo alla quarta parte; ma siccome il Peligot scoperse che esso non è un metallo ma un ossido, così ponendolo a confronto cogli ossidi della forma $\dot{\square}$, il suo calorico specifico darebbe per l'urano, ossia ossido d'uranio, il peso atomico $96 = 88 + 8$, il che troppo si scosta dall'analisi del Peligot che in 68 d'urano trovò 60 di uranio ed 8 di ossigeno; che

se invece l'urano si considera come un ossido della forma $\square^2 O^3$, si trova mediante il calorico specifico il peso atomico $226 = 2.(101 + 12)$, che abbastanza si accorda colla predetta composizione trovata dal Peligot: ma siccome le composizioni degli altri ossidi di uranio date dal Peligot si allontanano da tutte le analogie, così chi volesse piuttosto affidarsi alle determinazioni del calorico specifico potrebbe ammettere, per esempio, che uranio $= Ui = 64$, che il suo protossido $Ui\,O = 72$ corrispondesse coll'urano del Berzelius, di cui è precisamente la terza parte; la capacità pel calorico di tal equivalente sarebbe circa 4,52 che non molto si scosta dalla 5, spettante all'ossido di zinco ($Zn\,O = 40$); e l'ossido uranico ($U^2 O^3 = 456$) del Berzelius sarebbe un ossido di uranio espresso dalla formula $Ui^2 O^3 = 152$.

Dopo aver parlato delle capacità pel calorico che Dulong, Petit e Regnault fanno dipendere dal peso degli equivalenti chimici, parlerò di alcune altre proprietà delle quali egualmente s'indagò la corrispondenza con tali equivalenti. Il Becquerel ravvisò una qualche rassomiglianza fra l'ordine termoelettrico dei metalli e quello delle capacità specifiche pel calorico, e siccome queste capacità sono inversamente proporzionali agli equivalenti chimici, così ne verrebbe che il potere termoelettrico procedesse in ordine inverso del peso degli equivalenti. Ora l'ordine termoelettrico si può esprimere con

Sb ——	Fe ——	Zn,	Ag_{II},	Au,	Cu ——	Sn,	Pb,	Pt —	Bi
64	28	33	54	99	32	59	104	99	106

dove le lineette d'interruzione indicano una differenza molto sensibile nel potere termoelettrico; invece questi medesimi metalli distribuiti secondo il peso dei loro equivalenti, sono

Fe,	Cu,	Zn ——	Ag_{II},	Sn,	Sb ——	Pt,	Au,	Pb,	Bi
28	32	33	54	59	64	99	99	104	106

Si vede adunque che le due serie sono molto differenti ed in particolare gli estremi antimonio (Sb) e bismuto (Bi) della prima serie si trovano poco discosti nella seconda; invece rame (Cu) e piombo (Pb), che sono all'incirca negli estremi della seconda serie, sono poco discosti nella prima: e di più nella prima serie l'antimonio (Sb) di molto precede il ferro (Fe), lo zinco (Zn), il rame (Cu) e lo stagno (Sn),

mentre nella seconda esso invece li segue; dicasi lo stesso dell' oro (Au) rispetto allo stagno (Sn).

Quando una corrente elettrica attraversa un corpo, essa vi produce un generale riscaldamento, che sembra dipendere dalla imperfetta conducibilità del corpo; oltre a ciò se il conduttore sia eterogeneo si osserva presso i punti di unione dei due metalli differenti un singolare fenomeno elettrotermico, che talvolta consiste soltanto in un riscaldamento più o meno grande del riscaldamento generale, e talvolta si converte in un raffreddamento: ora il Lamé scoprì la dipendenza di questo fenomeno dal noto fenomeno termoelettrico, ed osservò che presso l' unione dei due metalli si ha un riscaldamento maggiore del generale quando la corrente va dal metallo dotato di maggior potere termoelettrico all' altro; e che invece, se la corrente esce dal metallo dotato di minor potere termoelettrico, si ha riscaldamento minore, che può divenire un raffreddamento, se non sia molto grande il riscaldamento generale, e se i metalli molto differiscano in riguardo al potere termoelettrico. Viene da ciò che quando una corrente elettrica attraversa un conduttore eterogeneo, essa vi produce nelle giunture dei metalli differenti delle variazioni di temperatura, le quali tutte concorrono a generare una corrente termoelettrica opposta alla generatrice, e che si palesa al cessare di questa. Questa teoria fu riprodotta e confermata dal Pacinotti, il quale pure ha trovato che la corrente diretta dal metallo di minor potere termoelettrico all' altro produce un raffreddamento, che può essere però mascherato dal riscaldamento generale a tutto il circuito; e torna forse a conferma di questa teoria l' osservazione del predetto Pacinotti, che come la corrente termoelettrica va dall' argento al rame, oppure dal rame all' argento, secondo che la temperatura è poco o molto elevata, così pure la corrente elettrica produce, secondo la sua varia intensità, il freddo in ambedue le opposte direzioni. Da questa corrispondenza fra i fenomeni termoelettrici e gli elettrotermici ne viene che se sussistesse la relazione indicata dal Becquerel, anche i fenomeni elettrotermici sarebbero subordinati alla capacità pel calorico e quindi anche ai pesi degli equivalenti chimici, e che perciò una corrente elettrica non potrebbe pro-

durre un raffreddamento, se non quando il metallo da cui vien fuori avesse un equivalente chimico maggiore di quello in cui entra. Ma abbiamo già veduto quanto inesatta sia la legge indicata dal Becquerel; e siccome d'altra parte nè il peso dell'equivalente chimico, nè la capacità specifica pel calorico sembrano teoricamente aver alcuna relazione col potere termoelettrico, così nulla si può conchiudere sulla mutua loro dipendenza, finchè non si possa cangiare la capacità pel calorico di un metallo, e si venga a riconoscere che cangi nello stesso tempo anche il suo potere termoelettrico. Per lo contrario la piena corrispondenza osservata tra il peso dell'equivalente e la capacità pel calorico rendono sommamente probabile che queste due proprietà dei metalli abbiano tra loro una necessaria dipendenza, ed autorizzano a credere che le poche anomalie procedano o da imperfezione di sperienze o da calorico latente che venga a mascherare l'effetto della differente capacità pel calorico.

Alcuni chimici tentarono di collegare ai pesi degli equivalenti anche i pesi specifici dei corpi. Il Persoz cercò di stabilire che i corpi solidi abbiano i pesi specifici proporzionali a quelli dei loro vapori, che d'altronde si ritengono proporzionali agli equivalenti, o a semplicissimi multipli di quelli; la legge è sommamente semplice e bene si accorda coi pesi specifici del piombo e del perossido di manganese, ma credo che meriti ben poca attenzione una pretesa legge appoggiata a due soli fatti.

Il Kupfer credette invece che i corpi che si cristallizzano sotto una ugual forma primitiva abbiano il peso specifico inversamente proporzionale al peso dell'equivalente, e che il prodotto del peso specifico per l'equivalente sia proporzionale al volume della forma primitiva diviso per la terza potenza del suo asse; per altro, onde far accordare la sua ipotesi col fatto, egli è costretto a moltiplicare i pesi degli atomi ammessi dal Berzelius per $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 2, 4, od anche per 16; sicchè mi pare che anche questa legge affatto empirica meriti quell'obblio in cui la credo affatto caduta. Il Kopp pensa per lo contrario che nei corpi di ugual forma cristallina e di analoga composizione il peso specifico sia proporzionale all'equivalente chi-

mico, e che perciò gli equivalenti di tali corpi isomorfi abbiano ugual volume.

Suppongo che pochissima fede sia da prestarsi a queste leggi generali, e piuttosto ne espongo una di particolare trovata egualmente dal Kopp, e che sembra in qualche modo approssimarsi al vero. È noto che fra i composti di idrogeno, carbonio ed ossigeno vi sono due grandi famiglie di corpi analoghi, le quali hanno per istipiti due corpi isomerici, cioè l'una il gas olefiante ($H^2_2 C^2 = 14$), l'altra il metilene ($H_2 C = 7$), ed a questi susseguitano i due idrati che sono l'etere ordinario ($H^4_2 C^4 \dot{H}_2 = 37$) e l'alcool ($H^4_2 C^4 \dot{H}^2_2 = 46$) per la prima famiglia; e l'etere metilico ($H^2_2 C^2 \dot{H}_2 = 23$) e lo spirito di legno ($H^2_2 C^2 \dot{H}^2_2 = 32$) per la seconda: oppure si possono considerare come stipiti delle due famiglie l'etile ($H^5_2 C^4 = 29$) ed il metile ($H^3_2 C^2 = 15$), che hanno per ossidi i due eteri summenzionati ($H^5_2 C^4 O = 37$), ($H^3_2 C^2 O = 23$); mentre i due alcool ($H^5_2 C^4 O + \dot{H}_2 = 46$), ($H^3_2 C^2 O + \dot{H}_2 = 32$) sono gli idrati di tali ossidi. Inoltre l'etere ordinario e l'etere metilico unendosi con molti acidi danno origine agli antichi eteri e ad altri analoghi composti metilici, e sì quelli che questi possono considerarsi come sali formati dall'acido speciale combinato coll'ossido di etile, oppure coll'ossido di metile. D'altra parte gli acidi sono ordinariamente uniti ad un equivalente di acqua ($\dot{H}_2 = 9$), il quale fa le veci di base, e tiene perciò il luogo che nei predetti eteri è occupato dall'ossido di etile o di metile. È ben evidente che nel passare da uno di questi acidi idrati all'etere corrispondente, ed al composto metilico pure corrispondente, gli equivalenti chimici accresceranno i loro pesi di quantità costanti per tutti gli acidi: ora il Kopp trova in aggiunta che la stessa cosa avviene in riguardo ai volumi di tali equivalenti ed eziandio in riguardo alle temperature di ebollizione dei relativi composti; sicchè se per fissare le idee prendiamo 8 grammi per equivalente dell'ossigeno, dall'equivalente di un acido idrato a quello della combinazione dell'acido anidro coll'ossido di metile ($H^3_2 C^2 O = 23$) vi sarà l'accrescimento di 14 grammi ed in volume di 25 millilitri, e la temperatura dell'ebollizione si abbasserà di 63°; similmente dal suddetto composto all'altro analogo coll'ossido di etile ($H^5_2 C^4 O = 37$) vi sarà

ancora un accrescimento di 14 grammi e di 19 millilitri, mentre la temperatura dell' ebollizione aumenterà di 19°. Nell' unita Tavola III presento alcune applicazioni di queste due leggi: mi sono studiato di determinare i numeri arbitrarii in modo da rendere le differenze fra l' osservazione ed il calcolo le minori possibili, e nello stesso tempo di presentare le leggi del Kopp nel modo più generale.

Un' altra legge analoga fu stabilita dallo stesso Kopp, che pure è soltanto approssimata specialmente in riguardo alla temperatura dell' ebollizione: essa può esprimersi dicendo che quando in un corpo composto ad un equivalente di idrogeno ($H_2 = 1$) viene a *sostituirsi* un equivalente di cloro ($Cl_2 = 35,5$), mentre il peso dell' equivalente cresce necessariamente di 34,5 grammi, il suo volume cresce di 12,8 millilitri, e la temperatura dell' ebollizione si eleva di 24°; alcune applicazioni di tal legge si veggono registrate nella Tavola IV.

Il Kopp ha in seguito modificate le proprie idee in riguardo ai volumi degli equivalenti chimici, ammettendo che le costanti differenze di volume tra gli equivalenti che differiscono in ugual modo non abbian luogo alle ordinarie temperature dell' atmosfera, bensì pei volumi misurati a *temperature corrispondenti*, intendendo per temperature corrispondenti di due liquidi quelle che differiscono di un ugual numero di gradi dalle temperature di ebollizione; sicchè, ammessa la nota legge del Dalton, a queste temperature corrispondenti i vapori dei liquidi presentano un' ugual tensione. Perchè la legge del Kopp sui volumi degli equivalenti dei corpi a *temperature corrispondenti* fosse esatta, per qualunque distanza di queste temperature corrispondenti dalle temperature di ebollizione, bisognerebbe che tutti i liquidi egualmente si condensassero per un egual numero di gradi partendo dalla temperatura dell' ebollizione; ed infatti il Kopp ammette che tal condensamento sia di $\frac{1}{975}$ per ogni grado centigrado. Quantunque tutto ciò formi un ammasso d' ipotesi poco atto ad ingenerare fiducia, pure nella Tavola III ho esposte in particolare colonna anche le risultanze di questa legge del Kopp; colla dispiacenza per altro di non poter indicare i veri volumi osservati, poichè quelli che dà il

Kopp sono troppo conformi alla sua teoria, perchè possano considerarsi altrimenti che come calcolati e trovati abbastanza d'accordo colle esperienze. Nulladimeno questo accordo, quantunque soltanto approssimato, sarebbe notabilissimo ed utile, se veramente fosse generale, il che per altro non può abbastanza arguirsi dagli esempii forse raccolti a bello studio dal Kopp fra i moltissimi composti di carbonio, idrogeno ed ossigeno. Bisognerebbe formare delle tavole di gran lunga più estese di quelle che io dedussi da quanto lessi del Kopp, notarvi i volumi degli equivalenti e le temperature dell'ebollizione veramente osservate, ed allora si verrebbe a riconoscere se le leggi del Kopp sieno generali, o si restringano a qualche ben definita classe di corpi, o se invece ammettano sì forti e frequenti eccezioni da renderle affatto inutili.

Il Kopp applicò i suoi principii, o meglio si dirà le sue supposizioni, anche ai volumi degli equivalenti dei corpi semplici e specialmente dei metalli, e ritenne che i corpi aventi chimicamente una grande rassomiglianza abbiano gli equivalenti di volume eguale; e che i metalli nel combinarsi coll'ossigeno, o col cloro, e gli ossidi nel combinarsi coll'acido solforico ($S\,O^3$), o coll'acido azotico ($A_2\,O^5$) aumentino i volumi dei loro equivalenti, se non di quantità costanti, almeno di quantità riducibili a due, o tutto al più a tre valori differenti. Ciò fu da me esposto nella Tavola V, anche in tal caso col dispiacere che i volumi che tolsi dal Kopp sieno da lui dati come esatti senza porli a confronto con volumi veramente osservati, e che sieno probabilmente da lui stati esclusi tutti quegli ossidi e quei sali che non si adattavano alla sua legge. Se si volesse dar qualche peso alla supposizione del Kopp sull'egual volume degli equivalenti dei metalli che in qualche parte si assomigliano, potrebbe dedursene un altro motivo per dimezzare l'equivalente dell'argento ($Ag = 108$) ammesso dal Berzelius, come già abbiamo fatto in base della sua capacità pel calorico.

Relativamente alla temperatura dell'ebollizione dei corpi composti soltanto di idrogeno e di carbonio, il Gerhardt ha data una legge approssimata, che, alcun poco generalizzata, può esprimersi così: Il nu-

mero degli equivalenti di idrogeno contenuti in un equivalente del corpo si moltiplichi per 10,4, poscia lo stesso numero accresciuto di 4 e diminuito del numero degli equivalenti del carbonio si moltiplichi per 15; dal primo prodotto si sottri il secondo, e si avrà la temperatura dell'ebollizione: la Tavola VI presenta il confronto fra questo calcolo e l'osservazione, relativamente ai corpi dati per esempio dal Gerhardt.

Avendo avuto occasione di nominare gli acidi acetico ecc., e così pure l'etile ecc., vi aggiunsi i segni che ne esprimono l'analisi elementare, non già i segni $\bar{A}$, Ae, ecc. che sono usati da alcuni chimici, ma che mi sembrerebbe doversi affatto proscrivere, poichè i segni (secondo la mia maniera di vedere) dovrebbero esprimere la composizione del corpo, non già essere una abbreviatura del suo nome. È ben vero che $\bar{A}$ presenta l'idea dell'acido acetico meglio di $(H^3_2\, C^4\, O^3)$; ma mentre vorrei che il nome di una sostanza chimica non istesse mai senza il suo segno, viceversa non si dovrebbe nemmeno adoperare il segno senza il nome, ed allora le parole *acetico, acetato* ecc. indicherebbero l'origine, le proprietà ecc. del composto espresso da $(H^3_2\, C^4\, O^3)$. Le parentesi servono a dinotare quei corpi che si disegnano con un nome particolare, ed è facile vedere quanti mezzi le parentesi e gli altri segni già usati offrano per rappresentare il modo con cui si vuol considerare la composizione dei corpi. Così, per esempio, lo spirito di legno si rappresenta con $(H^4_2\, C^2\, O^2)$; ma se lo si vuol considerare come un biidrato di metilene, lo si segnerà così $(H_2\, C)^2\, \dot{H}^2_2$; e se lo si riguarda come un idrato d'ossido metilico, lo si segnerà così $(H^3_2\, C^2)\, O\, \dot{H}_2$. L'etere metilico $(H^3_2\, C^2\, O)$ è anche un idrato di metilene $(H_2\, C)^2\, \dot{H}_2$, oppure un ossido metilico $(H^3_2\, C^2)\, O$, ed esso è isomerico coll' alcool $(H^6_2\, C^4\, O^2)$ che è un idrato di ossido etilico $(H^5_2\, C^4)\, O\, \dot{H}_2$, oppure un biidrato di gas olefiante $(H^2_2\, C^2)^2\, \dot{H}^2_2$. L'etere acetico considerato come una combinazione di acido acetico anidro $(H^3_2\, C^4\, O^3)$ e di etere ossia ossido etilico $(H^5_2\, C^4)\, O$ si segnerà con $(H^5_2\, C^4)\, O + (H^3\, C^4\, O^3)$. È da stabilirsi per massima di segnare mediante il segno + i composti del secondo ordine analoghi ai sali, tranne gli idrati che saranno da segnarsi con $\dot{H}_2$ posto dopo il segno del corpo, tanto se l'acqua faccia l'ufficio di componente elettro-negativo, come se faccia l'ufficio di elet-

tro-positivo; così la potassa idrata, che io chiamerei ossido potassico idrato (anzichè dirla, alla maniera dei sali, idrato potassano), si segnerà con $\dot{K}\,\dot{H}_2$. L'acido solforico idrato, nome, a mio credere, molto meglio espressivo di quello di solfato idrico, si segnerà con $\dddot{S}\,\dot{H}_2$, anzichè nel modo $\dot{H}_2 + \dddot{S}$, che lo indicherebbe come un sale; il solfato di ammoniaca si segnerà con $H_2^3 A_2 + \dddot{S} + \dot{H}_2$ ecc.

I segni chimici si prestano benissimo a presentare i processi di sostituzione, a tal fine crederei che nei composti derivati, i componenti dovessero occupare quelle posizioni che nel composto primitivo erano occupate da quel componente cui vennero sostituiti, cioè che fosse in tal caso da abbandonare l'ordine elettrico; gioverebbe anche separare, mediante virgole o punti, i componenti corrispondenti a quelli del composto primitivo. Così se vogliamo notare le sostituzioni nell'acido acetico idrato, noi lo segneremo con $(H_2^4 . C^4 O^4)$, ed esso darà l'acido cloracetico $(H_2 Cl_2^3 . C^4 O^4)$, dove il Cl_2^3 occupa il posto spettante all' H_2^3 a cui fu sostituito. Se il liquore degli Olandesi si suppone derivato dal cloruro etilico, lo segnerei con $(H_2^4 Cl_2 . C^4) Cl_2$, per indicare che proviene dal cloruro $(H_2^5 . C^4) Cl_2$; che se lo si volesse notare proveniente dal gas olefiante $(H_2^2 C^2)^2$, lo si potrebbe scrivere $H_2^3 Cl_2 . C^4 +$ $+ H_2 Cl_2$; con ulteriori sostituzioni si ha $H_2 Cl_2^3 . C^4 + H_2 Cl_2$ ecc. L'acido carbonico $C . O^2$ dà colle sostituzioni l'acido clorossicarbonico $C . O Cl_2$, ed il solfido carbonico $C . S^2$. Il surossido calcico $Ca . O^2$ dà il cloruro calciano $Ca . O Cl_2$; e con altra sostituzione esso dà l'azotano calciano $Ca . O \ddot{A}_2$, dove l'ossido azotico $\ddot{A}_2$ fu sostituito ad un equivalente di ossigeno; se lo si volesse considerare come un sale, lo si segnerebbe con $\dot{C}a + \ddot{A}_2$. L'etere $H_2^5 . C^4 O$ dà l'etere clorurato $H_2^3 Cl_2^2 . C^4 O$, oppure l'acido acetico $H^3 O^2 . C^4 O$. L'etere metilico $H_2^3 . C^2 . O$ dà l'acido formico $H_2 O^2 . C^2 O$, l'etere clorometilico $H_2^3 . C^2 . Cl_2$, ed il cloroforme $H_2 Cl_2^2 . C^2 . Cl_2$; e l'etere metilico $H_2^3 . C^2 . O$ può a sua volta supporsi derivato dal gas delle paludi $H_2^3 . C^2 . H_2$. Secondo le idee del Wentz dall'acido fosforico $P_2 . O^5$ provengono l'acido fosforoso $P_2 . H_2 O^4$ e l'acido ipofosforoso $P_2 . H_2^2 O^3$, ed appartengono pure allo stesso tipo il percloruro di fosforo $P_2 . Cl_2^5$, l'ossicloruro di fosforo $P_2 . Cl_2^3 O^2$, ed il solfocloruro di fosforo $P_2 . S^2 Cl_2^3$.

Laonde mi sembra poter conchiudere che l'uso dei segni chimici, ogniqualvolta si dee menzionare una sostanza di determinata composizione, sarebbe sommamente opportuno, e che diverrà necessario per fissare il significato delle nomenclature sempre mutabili, e tali rese forzatamente dal progresso della scienza; che onde i segni presentino un linguaggio veramente universale, bisogna fissarli invariabilmente, e che è conveniente scegliere a tal uopo quelli stabiliti dal Berzelius: che apponendo al basso di questi segni delle cifre arabe o romane si potrebbe fare in guisa, che essi si prestassero a rappresentare le varie opinioni dei chimici intorno alla grandezza degli equivalenti: che le ulteriori modificazioni delle nomenclature dovrebbero avere per fine principale di ricordare le proprietà dei corpi e specialmente la loro origine, le loro reazioni, lo stato allotropico od isomerico in cui si trovano, i tipi a cui appartengono ecc., e che in quanto alla numerica composizione essa sarebbe da esprimersi col segno chimico, giacchè la nomenclatura diverrebbe troppo complicata se dovesse indicare tale composizione; che la totale riforma di nomenclatura proposta dall'Avogadro porterebbe il gravissimo inconveniente che il nome non darebbe se non se l'analisi quantitativa, e sarebbe anche molto meno espressivo del segno chimico; che l'attuale nomenclatura potrebbe forse utilmente modificarsi facendo che gli ossidi e gli analoghi cloruri, solfuri ecc., quando entrano nei composti del secondo ordine cangiassero le loro desinenze *oso ico* in due nuove desinenze *ino ano*, appunto come gli *acidi*, *cloridi, solfidi* ecc. prendono in tal caso le desinenze in *ito ato*; che si dovrebbero sempre pubblicare le analisi quali risultano dalla sperienza, anzichè darle corrette giusta la teoria; che i valori degli equivalenti chimici si dovrebbero dare dentro i limiti di approssimazione risultanti dall'esperienza, e che sarebbe ottima cosa aggiungervi l'error probabile; che sarebbe utilissimo formare delle estese tavole dove la capacità pel calorico, i volumi ecc. fossero riferiti all'equivalente di ciascuna sostanza, e vi fossero anche aggiunte le temperature dell'ebollizione ecc. per vedere quali relazioni almeno approssimate esistano fra tali numeri.

(*Lette il* 23 *Marzo* 1846)

NOTE

(1) Non è molto che il Longchamp propose per l'idrogeno il nome di *couphos* (leggiero).

(2) Esempii. *Cloruro calciano* $= Ca\,O + Cl_2$ si chiamerebbe il cloruro di calce che serve a sviluppare il cloro, e che è ben differente dal *cloruro calcico* $= Ca\,Cl_2$, il quale unito ad un equivalente di acqua dà il muriato di calce; che se si voglia esprimerlo colla nuova nomenclatura lo si dirà *cloridrato* o, molto meglio, *cloridrogenato calciano* $= Ca\,O + H_2\,Cl_2$. La combinazione del *solfuro carbonico* $(C\,S^2)$ (che forse potrebbe dirsi *solfido carbonico* $(C\,S^2)$ perchè la sua composizione è analoga a quella dell'acido carbonico $(C\,O^2)$) coll'*ossido ferrico* $(Fe\,O^{\frac{3}{2}})$, che dal Berzelius dicevasi *carbosulphuretum ferricum*, io la chiamerei *solfo-carbonato ferrano* $(Fe^2\,O^3 + C\,S^2)$. L'*acido clorossicarbonico* $(C\,Cl_2\,O)$ (nel quale un equivalente di cloro tien luogo di uno di ossigeno) dà, per esempio, il *clorossicarbonato piombiano* $(Pb\,O + C\,Cl\,O)$. Un esempio di *solfo-sale* si ha nel *solfidrogenato solfopotassano* $(K\,S + H_2\,S)$. Si ha il *cianuro potassico* $(K\,C^2\,A_2)$ ed il *cianuro potassano* $(K\,O + C^2\,A_2)$; nel primo il cianogene $(C^2\,A_2)$ è unito col potassio, e nel secondo coll'ossido potassico.

TAVO

Che presenta i pesi degli equivalenti dei corpi semplici

(Vi sono aggiunte le formule ed

FAMIGLIE	Secondo Berzelius: Ordine elett.-chim.	Secondo Berzelius: Corpi Semplici	Secondo Berzelius: Peso dell'atomo	Equivalente probabile: Segno	Equivalente probabile: Peso	
	1	Ossigeno	8,000	O	8	
Cloroidi	5	Cloro	17,706	Cl_2	35,5	Ossido cloroso $Cl_2O = 43,5$; Acidi cloroso $Cl_2O^3 = 59,5$ $Cl = 17,7$. Marignac trovò da prima $Cl_2 = 36$, poscia mette $Cl_2 = 35,46$.
	6	Bromo	39,132	Br_2	80	Acido bromico $Br_2O^5 = 120$. Marignac trovò Br_2 da 79
	7	Iodio	63,180	I_2	126	Acido iodico $I_2O^5 = 166$: Solfuri iodoso $I_2S = 142$, iodico
	4	Fluore	9,352	F_2	18,5	
Solfor.	2	Solfo	16,093	S	16	Acidi iposolforoso $SO = 24$, solforoso $SO^2 = 32$, iposol
	8	Selenio	39,567	Se	40	Acidi selenioso $SeO^2 = 56$, selenico $SeO^3 = 64$. Solfuro
	17	Telluro	64,516	Te	64	Acido tellurico $TeO^2 = 80$. Solfido tellurico $TeS^2 = 96$.
Azotoidi	3	Azoto	7,081	A_2	14	Ossidi azotoso $A_2O = 22$, azotico $A_2O^2 = 30$; Acidi azo $A_2 = 14$. Erdmann e Marchand ritengono $A_2 = 14$.
	9	Fosforo	15,691	P_2	32	Acidi ipofosforoso $\frac{1}{2}P_2O = 20$, fosforoso $\frac{1}{2}P_2O^3 = 28$, fosforico $= PO^2 = 31,69$. Il Thompson aveva già discrepanze vi sieno da un chimico all'altro. Pelouze
	10	Arsenico	37,603	As_2	75	Acidi arsenioso $\frac{1}{2}As_2O^3 = 49,5$, arsenico $\frac{1}{2}As_2O^5 = 57,5$. arsenico $As_2S^5 = 155$, Persolfuro $As_2S^{18} = 363$.
Carbonoidi	15	Carbonio	6,115	C	6	Ossido carbonico $CO = 14$. Acidi ossalico $C^2O^3 = 36$, grafite trovarono $C_{II} = 2,9993$ e colla combustione giustificava la legge delle sostituzioni nella Naftalina.
	14	Boro	10,896	B	11	Acido borico $BO^3 = 35$. Etogeno del Balmain $B^2A_2 = 36$.
	20	Silicio	22,185	Si	22	Acido silicico (Silice) $SiO^3 = 46$. Pelouze trovò $Si_{III} = 7,115$.
	21	Idrogeno	0,4992	H_2	1	Acqua $H_2O = 9$. Surossido $H_2O^2 = 17$. Acidi cloridroge drogenico $H_2S = 17$. Selenido idrogenico $H_2Se = 41$. Secondo le prime sperienze del Lavoisier era $H_2 = 1,4$ determinazione del Prout aspirando ad una esattez trovò H_2 da 0,998 a 1,005. Erdmann e Marchand
Cromoidi	11	Cromo	28,145	Cr	28	Ossidi cromico $CrO^{\frac{3}{2}} = 40$, suscromico (ipercromico)
	12	Molibdeno	47,882	Mo	48	Ossidi molibdoso $MoO = 56$, molibdico $MoO^2 = 64$, Acido
	13	Tungsteno	94,640	W	95	Ossido tungstico $WO^2 = 111$, Acido tungstico $WO^3 = 119$.
	18	Tantalo (Columbio)	92,297	Ta	92	Ossido tantalico $TaO = 100$, Acido tantalico $TaO^{\frac{3}{2}} = 104$
	—	Pelopio	—	Pp		Nuovi metalli trovati dal Rose.
	—	Niobio	—	Nb		
	19	Titanio	24,293	Ti	24	Acido titanico $TiO^2 = 40$. Rose trova l'acido titanico

]A I.

uali possono attualmente considerarsi come i più probabili.

:si di alcuni dei loro composti.)

RINCIPALI COMPOSTI BINARII

lorico $Cl_2O^5 = 75,5$, perclorico $Cl_2O^7 = 91,5$; Solfuri cloroso $Cl_2S = 51,5$, clorico $Cl_2S^2 = 67,5$. Laurent trovò
$l_2 = 35,37$, infine con più diligenti sperienze $Cl_2 = 35,46$. Erdmann e Marchand trovano $Cl = 18$. Pelouze am-

25 a 79,94 e ritenne $Br_2 = 80$.
$_2S^2 = 158$. Marignac trovò $I_2 = 126,85$.

'orico $SO^{\frac{5}{2}} = 36$, solforico $SO^3 = 40$. Erdmann e Marchand trovarono $S = 16,005$. Berzelius trovò $S = 16,06$.
selenioso $SeS^2 = 72$. Fluorido selenioso $SeF_2^2 = 77$.

oso $A_2O^3 = 38$, azolico $A_2O^5 = 54$. Dumas trovò $A = 7$. Marignac trovò A_2 da 14,006 a 14,030 e ritenne
Pelouze, quantunque contrario all'ipotesi del Prout, pure riconobbe che $A_2 = 14,006$.
'osforico $\frac{1}{2}P_2O^5 = 36$. Solfidi ipofosforoso $P_2S = 48$, fosforico $P_2S^5 = 112$. Longchamp vorrebbe che fosse Acido
ammesso che $P = 12$, e i due acidi fossero: fosforoso $PO = 20$ e fosforico $PO^2 = 28$, il che mostra quanto gravi
rovò $P_2 = 32,024$.
Solfuro di arsenico $As_2^6S = 466$; Solfidi ipoarsenioso (Realgar) $As_2S^2 = 107$, arsenioso (Orpimento) $As_2S^3 = 123$,
Pelouze trovò $As_2 = 75,000$.
carbonico $CO^2 = 22$. Solfido carbonico $CS^2 = 38$. Cianogene $C^2A_2 = 26$. Dumas e Stas colla combustione della
del diamante $C_{II} = 3,0002$, ed osservarono che questa fortissima diminuzione nel valore ammesso dal Berzelius
Erdmann e Marchand collo stesso mezzo trovarono C da 5,987 a 6,015.

nico $H_2Cl_2 = 36,5$, bromidrogenico $H_2Br_2 = 81$, iodidrogenico $H_2I_2 = 127$, fluoridrogenico $H_2F_2 = 19,5$, solfi-
Tellurido idrogenico $H_2Te = 65$. Ammoniaca $H_2^3A_2 = 17$. Gas idrogeno carburato $H_2^2C = 8$. Gas olefiante $H_2^2C^2 = 14$.
poscia $H_2 = 1,36$. Berzelius con esperienze che differiscono da $H_2 = 0,992$ a $H_2 = 1,066$ volle rifiutare la teoretica
za che non era comportata nè dai pesi specifici adottati, nè dall'ommissione delle necessarie correzioni. Dumas
trovarono $H_2 = 1$.

$CrO^2 = 44$, Acido cromico $CrO^3 = 52$, Solfuro cromico $CrS^{\frac{3}{2}} = 52$, suscromico $CrS^2 = 60$, Solfido cromico $CrS^3 = 76$.
molibdico $MoO^3 = 72$.

$Ti^2O^3 = 72,59$.

CONTINUAZIONI

FAMIGLIE	Secondo il Berzelius: Ordine elett.-chim.	Corpi Semplici	Peso del-l'atomo	Equivalente probabile: Segno	Peso	
Stannoidi	22	Vanadio	68,467	V	68	Ossidi vanadioso $VO = 76$, vanadico $VO^2 = 84$; Acid
	16	Antimonio	64,516	Sb_2	129	Ossido antimonioso $Sb_2O^3 = 153$; Acidi antimonios $Sb_{III}O^2 = 60$.
	34	Stagno	58,824	Sn	59	Ossidi stagnoso $SnO = 67$, stagnico $SnO^2 = 75$; Solfur
Platinoidi	24	Osmio	99,559	Os	100	Ossidi osmioso $OsO = 108$, suosmioso (iperosmioso Solfuri e Solfido. Fremy trova $Os = 99,82$, Acid
	25	Iridio	98,680	Ir	99	Ossidi iridioso $IrO = 107$, iridico $IrO^2 = 115$, cogli ana
	26	Platino	98,680	Pt	99	Ossidi platinoso $PtO = 107$, platinico $PtO^2 = 115$, cogli
	23	Oro	99,441	Au	99	Ossidi auroso $AuO^{\frac{1}{2}} = 103$, aurico $AuO^{\frac{3}{2}} = 111$. Solfur $= Au = 98$.
Argiroidi	27	Rodio	52,111	R	52	Ossidi rodioso $RO = 60$, rodico $RO^{\frac{3}{2}} = 64$. Solfuro ro
	28	Palladio	53,272	Pd	53	Ossido palladioso $PdO = 61$, palladico $PdO^2 = 69$, ed ana
	30	Argento	108,129	Ag_{II}	54	Ossido argentico $Ag_{II}O^{\frac{1}{2}} = 58$; Solfuro argentico $Ag_{II}S^{\frac{1}{2}} = 62$ $Ag = 107,921$. Erdmann e Marchand ritennero
	29	Mercurio	101,266	Hg	100	Ossidi mercurioso $HgO^{\frac{1}{2}} = 104$, mercurico $HgO = 108$; rido mercurico (Sublimato corrosivo) $HgCl_2 = 135,5$
Cuproidi	33	Bismuto	106,430	Bi	106	Ossido (sesquiossido) bismutico $BiO^{\frac{3}{2}} = 118$; Solfuro e Sesquiossido $BiO^{\frac{3}{2}} = 83$, ma Heintz trovò $Bi =$
	35	Piombo	103,560	Pb	104	Ossido piombico $PbO = 112$, Surossido piombico $PbO^2 =$ già ammetteva il Thompson, $Pb = 104$.
	36	Cadmio	55,741	Cd	56	Ossido cadmico $CdO = 64$ ed analogo Solfuro.
	31	Rame	31,656	Cu	31,7	Ossidi rameoso $CuO^{\frac{1}{2}} = 35,7$, rameico $CuO = 39,7$ Marchand trovarono con quattro sperienze Cu d
Ferroidi	32	Urano (Uranilo)	216,909	U	204	Ossidi uranoso $UO = 212$, uranico $UO^{\frac{3}{2}} = 216$; Solfur suo 216,909) è il triplo del valore trovato com Peligot l'Urano è un ossido di Uranio $Ui^2O^2 = 136$ nilo; egli ammette inoltre il Sottossido $Ui^2O^{\frac{3}{2}} = 132$ che può considerarsi come un Ossido di uranil corrisponde il Cloruro $Ui^2Cl_2^{\frac{3}{2}} = 173,25$; al Pero Ebelmen trova $Ui = 59,4$.
	—	Uranio	—	Ui	60	
	40	Zinco	32,258	Zn	33	Ossido zincico $ZnO = 41$ ed analogo Solfuro. Jacquelin mann trova $Zn = 32,53$.
	37	Cobalto	29,519	Co	29,5	Ossido cobaltico $CoO = 37,5$, Surossido (Sesquiossido) d

ELLA TAVOLA I.

RINCIPALI COMPOSTI BINARII

anadico $V O^3 = 92$.
b, $O^4 = 161$, antimonico $Sb_2 O^5 = 169$. Thompson ammetteva $Sb_{III} = 44$, Ossidi $Sb_{III} O = 52$, $Sb_{III} O^{\frac{3}{2}} = 56$,

tagnoso $Sn S = 75$; Solfido stagnico $Sn S^2 = 91$.
s $O^{\frac{3}{2}} = 112$, osmico $Os O^2 = 116$, susosmico (iperosmico) $Os O^3 = 124$; Acido osmico $Os O^4 = 132$, cogli analoghi
smioso $Os O^3$, ed Acido osmico $Os O^4$.
ghi Solfuri iridioso $Ir S = 115$, iridico $Ir S^2 = 131$.
naloghi Solfuri.
uroso $Au S^{\frac{1}{2}} = 107$, aurico $Au S^{\frac{3}{2}} = 123$. Berzelius trovò ultimamente $Au = 98,333$. Non è difficile che $Ir = Pt =$

ico $R S^{\frac{3}{2}} = 76$.
ghi Solfuri.
loruro $Ag_{II} Cl_2^{\frac{1}{2}} = 71,75$. Baup trovò $Ag O = 116$. Marignac trovò a varie riprese $Ag = 109,92$, $Ag = 108,00$,
g $= 110$, appunto come aveva ammesso il Thompson. Pelouze ammette $Ag = 107,921$.
olfuro mercurioso $Hg S^{\frac{1}{2}} = 108$, mercurico $Hg S = 116$; Cloruro mercurioso (Calomelano) $Hg Cl_2^{\frac{1}{2}} = 117,75$, Clo-
rdmann e Marchand ammettono $Hg = 100$ come medio di cinque sperienze da 100,02 a 100,09.
i $S^{\frac{3}{2}} = 130$. Berzelius sostituì al primo valore 106,430 il $Bi = 70,954$ e ritenne che Ossido bismutico $Bi O = 79$
06,4302, $Bi O^2 = 122$, $Bi O^{\frac{5}{2}} = 126$. Peligot ritiene che l'equivalente dell'ossido sia $Bi^2 O^3 = 236$.
20; Solfuro piombico $Pb S = 120$; Cloruro piombico $Pb Cl_2 = 139,5$. Erdmann e Marchand trovarono, come

iossido di rame $Cu O^2 = 47,7$, e gli analoghi Solfuri ed inoltre il Persolfuro di rame $Cu S^5 = 111,7$. Erdmann e
31,70 a 31,75.
ranoso $U S = 220$, uranico $U S^{\frac{3}{2}} = 228$. L'equivalente 204 che attribuisco all'Urano del Berzelius (in luogo del
egue dal Peligot e da altri, così il $U O$ si accorda col seguente $Ui^3 O^4$, ed il $U O^{\frac{3}{2}}$ col $Ui^2 O^3 = 144$. Secondo il
he dà origine ai sali verdi, e che talvolta invece prende il carattere di radicale, ed è allora da lui chiamato Ura-
l Deutossido nero $Ui^2 O^{\frac{5}{2}} = 140$, il Tritossido oliva $Ui O + Ui^2 O^3 = 212$, ed il Perossido dei sali gialli $Ui^2 O^3 = 144$,
$Ui^2 O^2 + O = 144$. All'Urano (ossido d'Uranio) $Ui O = 68$ è analogo il Cloruro d'Uranio $Ui Cl_2 = 95,5$; al Sottossido
ido corrisponde il Cloruro d'uranilo $Ui^2 O^2 + Cl_2 = 171,5$. Wertheim trova $Ui = 59,7$, Rammelsberg $Ui = 60$ ed

la quattro sperienze trovò $Zn = 33,12$ fra 33,10 e 33,17. Favre trovò $Zn = 32,99$ fra 32,94 e 33,07. Erd-

obalto $Co O^{\frac{3}{2}} = 41,5$; Solfuro cobaltico $Co S = 45,5$, Sesquisolfuro di cobalto $Co S^{\frac{3}{2}} = 53,5$, Bisolfuro $Co S^2 = 61,5$.

CONTINUAZIONI

FAMIGLIE	Secondo Berzelius: Ordine elett.-chim.	Corpi Semplici	Peso del-l' atomo	Equivalente probabile: Segno	Peso	
Ferroidi	38	Nichel	29,574	Ni	30	Ossido nichelico $Ni\,O = 38$ ed analogo Solfuro.
	42	Cerio	45,976	Ce	46	Ossidi cerioso $Ce\,O = 54$, cerico $Ce\,O^{\frac{3}{2}} = 58$ ed analogl
	—	Lantanio	—	Ln	48	Ossido lantanico $Ln\,O = 56$ secondo l' Hermann. } Du
	—	Didimio	—	Dd		
	43	Torio	59,592	Th	60	Ossido torinico (Torina) $Th\,O = 68$, Solfuro $Th\,S = 76$
	39	Ferro	27,136	Fe	28	Ossidi ferroso $Fe\,O = 36$, ferrico (Colcotar) $Fe\,O^{\frac{3}{2}} = 40$ $Fe\,S^2 = 60$. Svanberg e Nolin trovarono $Fe = 27,9$
—	41	Manganese	27,671	Mn	27,5	Ossidi manganoso $Mn\,O = 35,5$, manganico $Mn\,O^{\frac{3}{2}} = 39,5$
Zirconoidi	45	Alluminio	13,693	Al	14	Allumina $Al\,O^{\frac{3}{2}} = 26$. Thompson ammetteva $Al_{2III} = 1($
	47	Glicio (Berillio)	26,501	Be	26	Glicina $Be\,O^{\frac{3}{2}} = 38$. Thompson ammetteva $Be_{2III} = 18$.
	44	Zirconio	33,616	Zr	34	Zirconia $Zr\,O^{\frac{3}{2}} = 46$. Thompson ammetteva $Zr_{2III} = 4($ $Zr_2\,O^3 = 90,5$ coll'analogo cloruro $Zr_2\,Cl_2^3 = 173$.
	—	Norio	—	No		Nuovo metallo scoperto nella Zirconia dallo Svanberg.
	46	Ittrio	32,201	Y	32	Ittria $Y\,O = 40$.
	—	Terbio	—	Tb		} Nuovi metalli scoperti nell'Ittria dal Mosander.
	—	Erbio	—	Eb		
—	48	Magnesio	12,668	Mg	12,7	Magnesia $Mg\,O = 20,7$; Solfuro magnesico $Mg\,S = 28,7$
Baroidi	49	Calcio	20,482	Ca	20	Calce $Ca\,O = 28$, Biossido di calcio $Ca\,O^2 = 36$; Solfur calcico $Ca\,F_2 = 38,5$. Dumas dall'analisi dello spat rignac; Berzelius pur confessando errata la prim ma Erdmann e Marchand riconfermarono il Ca=
	50	Stronzio	43,783	Sr	44	Stronziana $Sr\,O = 52$, Biossido di stronzio $Sr\,O^2 = 60$ Marignac.
—	51	Bario	68.550	Ba	68	Barite $Ba\,O = 76$; Biossido di bario $Ba\,O^2 = 84$; Solfu Pelouze trova $Ba = 68,64$.
Potassoidi	52	Litio	6,43	L	6	Litina $L\,O = 14$; Solfuro $L\,S = 22$. Arfredson avea l tiene 0,61 di acido e 0,39 di base, ne deduss
	53	Sodio	23,272	Na	23	Soda $Na\,O = 31$, Surossido $Na\,O^{\frac{3}{2}} = 35$; Solfuro sodic ruro $Na\,Cl_2 = 58,5$. Longchamp dedusse da princip si poco tra loro si accordano che danno per l'ossiger
	54	Potassio	39,193	K	39	Potassa $K\,O = 47$, Surossido di potassio $K\,O^3 = 63$, S Cloruro potassico $K\,Cl_2 = 74,5$, Ioduro $K\,I_2 = 16$ posizione del perossido poco può stabilirsi di sicu 0,81.

ELLA TAVOLA I.

RINCIPALI COMPOSTI BINARII

olfuri. Hermann trovò $Ce = 46$.

uovi metalli che il Mosander trovò nel Cerio.

Ion bisogna confonderlo colla terra che portava il nome di Torina. e che si riconobbe essere un Fosfato d'ittria.

oltosolfuri di ferro $FeS^{\frac{1}{8}} = 30$, $FeS^{\frac{1}{2}} = 36$, Solfuri ferroso $FeS = 44$, ferrico $FeS^{\frac{3}{2}} = 52$, Bisolfuro di ferro he sembra ammesso anche dal Berzelius.

iurossido $MnO^2 = 43,5$; Acido manganoso $MnO^3 = 51,5$, Acido ossimanganico $MnO^{\frac{7}{2}} = 55,5$, Solfuro $MnS = 43,5$.

Allumina $Al_{2III}O = 18$.

Zirconia $Zr_{2III}O = 48$, il che costituisce una somma differenza. Hermann trova Zr_2 da 66,5 a 67,2 e Zirconia

alcico $CaS = 36$; Bisolfuro di calcio $CaS^2 = 52$, Persolfuro $CaS^5 = 100$; Cloruro calcico $CaCl_2 = 55,5$; Fluoruro l'Islanda dedusse che sia esattamente $Ca = 20$, nel che convennero anche Erdmann, Marchand, Salvetat e Maleterminazione, ritenne che $Ca = 20,15539$, come medio di cinque sperienze comprese tra 20,1176 e 20,1944, 20,031.

Solfuro stronzico $SrS = 60$. Pelouze trova $Sr = 43,842$. Salvetat trovò $Sr = 44$, il che è ammesso anche dal

barico $BaS = 84$; Persolfuro di bario $BaS^5 = 148$. Salvetat trovò $Ba = 68$ il che è ammesso anche dal Marignac.

vato $L_2 = 20,45$, Gmelin $L_2 = 15,30$, Kralovanszki $L_2 = 20,34$. Hermann trovò che il Carbonato di Litina con- $L_2 = 12,165$, ma atteso la correzione portata nel peso di $CO^2 = 22$ ne risulta $L_2 = 12,04$.

$NaS = 39$, Bisolfuro $NaS^2 = 55$, Trisolfuro $NaS^3 = 71$, Quadrisolfuro $NaS^4 = 87$, Persolfuro $NaS^5 = 103$, Cloteoretici che il Perossido sia NaO^2, ed egli osservò che la formula $NaO^{\frac{3}{2}}$ fu dedotta da cinque sperienze le quali contenuto nel Perossido 0,20, 0,30, 0,30, 0,37, 0,42. Pelouze trova $Na = 22,974$.

furo potassico $KS = 55$, Bisolfuro $KS^2 = 71$, Trisolfuro $KS^3 = 87$, Quadrisolfuro $KS^4 = 103$, Persolfuro $KS^5 = 119$, Marignac trovò da prima $K = 39,88$, poscia $K = 39,201$, $K = 39,115$; Pelouze trova $K = 39,144$. Sulla compoichè in cinque sperienze si trovò per la quantità d'ossigeno in esso contenuto 0,48, 0,61, 0,66, 0,68, 0,79,

TAVOLA II.

Contenente i pesi specifici di varii fluidi aeriformi, ed il loro confronto cogli equivalenti chimici.

Gas o Vapore	Equivalente chimico od un suo multiplo o summultiplo	Densità del fluido aeriforme Aria = 1	Rapporto all'equival.	Peso in grammi a 0° e $0^m,76$ di un litro	Rapporto all'equival.	Osservatori
			0,0		0,0	
1.Gas Ossigeno	2 O = 16	1,40359	690	1,43353	896	Biot ed Arago
		1,1026	689	1,4323	895	detti
		1,1026	689	1,4324	895	Berzelius e Dulong
		1,1057	691			Dumas e Boussingault
		1,10563	691			Regnault
21.Gas Idrogeno	$H_2 = 1$	0,07321	732	0,0951	951	Biot ed Arago
		0,0688	688	0,0894	894	Berzelius e Dulong
		0,06926	693			Regnault
Vap. Acqua	$H_2O = 9$	0,062	689	0.8054	895	Berzelius e Dulong
5.Gas Cloro	$Cl_2 = 35,5$	2,470	696	3,2088	904	Gay-Lussac e Thènard
		2,4252	683	3,1505	887	Bischof
Protossido di cloro		2,3144		3,0066		Gay-Lussac
G. Acido cloridr.	$\frac{1}{2} H_2 Cl_2 = 18,25$	1,2474	683	1,62	888	Biot ed Arago
6.Vap. Bromo	$Br_2 = 80$	5.3933	674			Berzelius
Acido bromidrog.	$\frac{1}{2} H_2 Br_2 = 40,5$	2,731	674			detto
7.Vap. Iodio	$I_2 = 126$	8,6195	684	11,1976	889	Gay-Lussac
		8.716	692	11.323	899	Dumas
		8,8172	700	11,4542	909	Bischof
		8,7011	691			Berzelius
Acido iodidrog.	$\frac{1}{2} H_2 I_2 = 63.5$	4,443	700	5,7535	906	Gay-Lussac
				5,7719	909	detto
		4,4193	696			Berzelius
4.Gas Fluore		3,3979		4.4141		Bischof
2.Vap Solfo	$S = 16$	1,1444	715	1,4867	929	detto
G. Acido solforoso	$S O^2 = 32$	2,1204	663			Gay-Lussac e Thènard
		2,1930	685	2,8489	890	J. Davy e Gay-Lussac
		2,247	702	2,9190	912	Bischof
G. Acido solfidr.	$H_2 S = 17$	1,1912	701	1,5475	910	Gay-Lussac e Thènard
		1,2132	713	1.5760	927	Bischof
		1.178	693			Pouillet, *Physique* § 533
3.Gas Azoto	$A_2 = 14$	0.9691	692	1.2590	899	Biot ed Arago
		0,976	697	1,2675	905	Berzelius e Dulong
		0,972	694			Dumas e Boussingault
		0.97137	694			Regnault
Aria		1,		1.2991		Secondo Dumas e Boussingault di 23 oss. e 77 azoto

CONTINUAZIONE DELLA TAVOLA II.

Gas o Vapore	Equivalente chimico od un suo multiplo o summultiplo	Densità del fluido aeriforme Aria = 1	Rapporto all'equival.	Peso in grammi a 0° e $0^m,76$ di un litro	Rapporto all'equival.	Osservatori
			0,0		0,0	
G. Ossido azotoso	$A_2 O = 22$	1,5204	691			Colin
		1,5269	694			detto
		1,5273	694	1,9841	900	Berzelius e Dulong
G. Ossido azotico	$\frac{1}{2} A_2 O^2 = 15$	1,0388	692	1,3495	899	Bérard
		1,0393	693	1,3501	900	Bischof
		1,0010	667	1,3004	867	Berzelius e Dulong
Gas Ammoniaca	$\frac{1}{2} H^3_2 A_2 = 8,5$	0,59669	702	0,7751	912	Biot ed Arago
		0,5912	696	0,7680	904	Berzelius e Dulong
9. G. Idrog. protosf.	? $\frac{1}{2} H^3_2 P_2 = 17,5$	1,256	712			Pouillet, *Physique* § 533
G. Idrog. fosfor.	?	0,87		1,1302		H. Davy, Berzel. e Dulong
10. G. Idrog. arsenic.	?	0,529		0,6872		Tromsdorff
	$\frac{1}{2} H_2 As_2 = 38$	2,695	709	3,5023	922	Dumas
Cloruro d'Arsen.	$\frac{1}{2} As^2_2 Cl_2 = 92,75$	6,3006	679	8,1852	883	detto
15. G. Ossido carbon.	$CO = 14$	0,9569	683	1,2431	888	Cruikshank
		0,9727	695	1,2636	903	Berzelius e Dulong
G. Acido carbon.	$CO_2 = 22$	1,5196	691	1,9741	897	Biot ed Arago
		1,524	693	1,9805	900	Berzelius e Dulong
		1,5291	695			Regnault; alla temp. 0° e press. $0^m,76$
Gas olefiante	$H^2_2 C^2 = 14$	0,97804	699	1,27052	907	Teo. de Saussure
		0,9804	700	1,2736	910	Berzelius e Dulong
Vap. Alcool assol.	$H^2_2 C^2 H_2 = 23$	1,6133	701			Gay-Lussac
		1,6004	696	2,0791	904	Berzelius e Dulong
Vap. Etere	$H^4_2 C^4 H_2 = 37$	2,5860	699			Gay-Lussac
		2,5808	697	3,3527	906	Berzelius e Dulong
G. Idrog. carbon.	$H^2_2 C = 8$	0,5590	699	0,7262	908	detti
G. Clorossicarbon.	$C Cl_2 O = 49,5$	3,3894	684	4,4032	890	J. Davy
		3,442	697			Pouillet, *Physique* § 533
Vap. Solfido carb.	$C S^2 = 38$	2,6447	696	3,4357	904	Gay-Lussac
Gas Cianogene	$C^2 A_2 = 26$	1,8188	700	2,3628	909	Berzelius e Dulong
V. Acido cianidr.	$\frac{1}{2} H_2 C^2 A_2 = 13,5$	0,9438	699	1,2261	908	detti
Gas Clorocianico	$\frac{1}{2} C^2 A_2 Cl_2 = 30,75$	2,1113	687	2,7428	890	Gay-Lussac
14. Cloruro di Boro	? $B^2 Cl_2 = 57,5$	3,942	686	5,1212	890	Dumas
Acido fluoborico	? $B^2 F_2 = 30,5$	2,3124	758			detto
20. Acido fluosilicico		3,5375		4,6425		J. Davy
Cloruro di silicio	? $Si Cl^2_2 = 93$	5,9390	639	7,7154	830	Dumas
19. Perclor. di titanio	$Ti Cl^2_2 = 95$	6,836	720	8,881	935	detto
34. Perclor. di stagno	$Sn Cl^2_2 = 130$	9,1997	708	11,9514	919	detto
29. Vap. Mercurio	$Hg = 100$	6,976	698	9,0625	906	detto

TAVOLA III.

Dati elementari dalla somma dei quali si possono determinare, secondo i principii del Kopp, i volumi degli equivalenti chimici di alcuni corpi liquidi e le temperature delle loro ebollizioni.

	Equivalente chimico		Volume dell'equiv. alle temp. ordinarie	Tempe-ratura dell'ebolli-zione	Volume dell'equiv. alla temp. dell'eboll.
	Formula	Peso			
Ossigeno	O	8			4,68 *
Idrogeno	H_2	1			4,68 *
Carbonio	C	6			6,24 *
	$H_2^2 C^2$	14	19 *	19°. *	21,84 *
Acqua	$H_2 O$	9	7 *	61°. *	9,36 **
Ossido metilico	$H_2^3 C^2 O$	23	32 $_*$	— 2°. $_*$	31,2 $_*$
Ossido etilico (Etere)	$H_2^5 C^4 O$	37	51	17°. $_*$	53
Acido Formico	$H_2 C^2 O^3$	37	30 $_*$	38°. $_*$	31,2 $_*$
Acido Acetico	$H_2^3 C^4 O^3$	51	49 $_*$	57°. $_*$	53 $_*$

(*) Questi non sono se non se numeri affatto ipotetici, i quali sommati insieme danno i volumi e le temperature di ebollizione dei liquidi composti; così per esempio il doppio della somma dei numeri appartenenti a H_2 ed a C dà il numero 21,84 appartenente al $H_2^2 C^2$. Questo $H_2^2 C_2$ aggiunto alla serie metilica dà la serie etilica; alla prima serie appartiene l'Ossido metilico (Idrato di metilene) ($H_2^3 C^2 O$), lo Spirito di legno ($H_2^4 C^2 O^2$) e l'Acido formico, mentre la seconda serie contiene l'Ossido etilico (Etere) ($H_2^5 C^4 O$), l'Alcool ($H^6 C^4 O^2$) e l'Acido acetico. Lo stesso $H_2^2 C^2$ aggiunto tre volte ai composti etilici ($H_2^5 C^4$) dà i composti amilici ($H_2^{11} C^{10}$), ed aggiunto all'Acido acetico dà l'Acido Butirico, poscia l'Acido Valerianico, ecc. Si noterà che l'aggiunta di $H_2^2 C^2$ porta sempre gli accrescimenti 14. 19, 19°., 21, 84 nelle rispettive colonne.

(**) Il numero 9,36 che risulta dalla somma di quelli appartenenti ad H_2 ed a O dà conforme all'osservazione il volume in litri del peso 9 in chilogrammi di acqua alla temperatura della sua ebollizione.

($_*$) Anche questi sono numeri ipotetici che servono soltanto alla formazione di quelli che seguono dopo. Si noterà che le righe dell'Ossido etilico e dell'Acido Acetico sono rispettivamente formate da quelle dell'Ossido metilico e dell'Acido Formico mediante l'accrescimento di $H_2^2 C^2$, 14, 19, 19°., 21,84. In quanto al numero 51 ed al $53 = 5 \times 4,68 + 4 \times 6,24 + 4,68$ essi danno approssimatamente i volumi di 37 chilogrammi di etere alla temperatura ordinaria ed alla temperatura della sua ebollizione.

CONTINUAZIONE DELLA TAVOLA III.

Volumi degli equivalenti e temperature dell'ebollizione di alcuni liquidi, calcolate sommando i dati elementari ipotetici esposti precedentemente.

	Equivalente chimico		Volume dell' equiv. alla temp. ordinaria		Temperatura dell' ebollizione		Volume dell' equival. alla temp. dell' ebolliz.		
	Formula	Peso	oss.	calc.	osserv.	calcolata	oss.	calcol.	
Idr. metil. (Spir. di legno	$H^3_2 C^2 O + H^2 O$	32	40	39	60°.	59°.		40,6	
Idrato etilico (Alcool)	$H^5_2 C^4 O + H_2 O$	46	58	58	78°.4	78°.		62,4	
Idrato amilico	Alcool + 3 $H^2_2 C^2$	88				135°.			
Acido Formico idrato	$H_2 O + H_2 C^2 O^3$	46	37	37	98°.5	99°.		40,6	
Formiato metilico	$H^3_2 C^2 O + H_2 C^2 O^3$	60				36°.			
— etilico	$H^5_2 C^4 O + H_2 C^2 O^3$	74	82	81	53°.4	55°.		84.2	
Acido Acetico idrato	$H_2 O + H^3_2 C^4 O^3$	60	56	56	120°.	118°.		62,4	Si deduc. dai composti formici sommandovi $H^2_2 C^2$.
Acetato metilico	$H^3_2 C^2 O + H^3_2 C^4 O^3$	74	81	81	58°.	55°.		84,2	
— etilico	$H^5_2 C^4 O + H^3_2 C^4 O^3$	88	99	100	74°.	74°.		106.1	
— amilico	$H^{11}_2 C^{10} O + H^3_2 C^4 O^3$	130				131°.			
Acido Butirico idrato	$H_2 O + H^7_2 C^8 O^3$	88				156°.			Si deduc. dai preced. coll' aggiunta dei $H^2_2 C^2$ e dei numeri corrispond.
Butirato metilico	$H^3_2 C^2 O + H^7_2 C^8 O^3$	102				93°			
— etilico	$H^5_2 C^4 O + H^7_2 C^8 O^3$	116				142°.			
Acido Valerianico idrato	$H_2 O + H^9_2 C^{10} O^3$	102				175°.			
Valerianato etilico	$H^5_2 C^2 O + H^9_2 C^{10} O^3$	130				131°.			
Acido Capronico idrato	$H_2 O + H^{11}_2 C^{12} O^3$	116				194°.			
Acido Caprilico idrato	$H_2 O + H^{15}_2 C^{16} O^3$	144				232°.			
Acido Benzoico idrato	$H_2 O + H^5_2 C^{14} O^3$	122			239°.	— 63°.			I vol. alla temper. dell'ebollizione sono calcolati mediante i dati element. prec. In quanto alle temp. dell'ebollizione ed i volumi alle temper. ordinarie non si poterono calcolare se non se le differenze in base delle differenze 25 e — 63°. che si scorgono fra i dati element. corrispond all'acqua e quelli corrispond. all' ossido metilico; ed in base delle dif-
Benzoato metilico	$H^3_2 C^2 O + H^5_2 C^{14} O^3$	136	124	19	198°.	19°.		156	
— etilico	$H^5_2 C^4 O + H^5_2 C^{14} O^3$	150	144		209°.			178	
Acido Succinico idrato	$H_2 O + H^2_2 C^4 O^3$	59	38	25	235°.	−63°.		57,8	
Succinato metilico	$H^3_2 C^2 O + H^2_2 C^4 O^3$	73		19		19°.			
— etilico	$H^5_2 C^4 O + H^2_2 C^4 O^3$	87	84		214°.			101,4	
Acido Suberico idrato		80							
Suberato metilico		94	93	19					
— etilico		108	107						
Acido Mucico idrato	$H^2_2 O + H^4_2 C^6 O^7$	105							
Mucato metilico	$H^3_2 C^2 O + H^4_2 C^6 O^7$	119	81	19				120,1	
— etilico	$H^5_2 C^4 O + H^4_2 C^6 O^7$	133	101					142	
Etere carbonico	$H^5_2 C^4 O + C O^2$	59	61		126°.			68,6	
Acido Solforico idrato	$H_2 O + S O^3$	49	26	25					
Solfato metilico	$H^3_2 C^2 O + S O^3$	63	48						

CONTINUAZIONE DELLA TAVOLA III.

	Equivalente chimico		Volume dell'equiv. alla temp. ordinaria		Temperatura dell'ebollizione		Volume dell'equival. alla temp. dell'eboliz.		
	Formula	Peso	oss.	diff. calc.	osserv.	differ. calcolata	oss.	calcol.	
Acido Azotico idrato	$H_2O + A_2O^5$	63	42	25					ferenze 19 e 19°. portate da ogni aggiunta di $H_2^2C^2$.
Azolato metilico	$H_2^3C^2O + A_2O^5$	77	65		66°.	19°.			
— etilico	$H_2^5C^4O + A_2O^5$	91			85°.				
Iodido metilico	$H_2^3C^2 + I_2$	141	63	19	45°.	19°.			
— etilico	$H_2^5C^4 + I_2$	155	81		64°.8	57°.			
— amilico	$H_2^{11}C^{10} + I_2$	197			122°.				
Solfuro di metile	$H_2^3C^2 + S$	31	37	19					
— di etile	$H_2^5C^4 + S$	45	55		73°.				
Surclorido formilico					57°.	19°.			
— acetilico					76°.				

I volumi e le temperature osservate le tolsi dai sunti dati dai giornali delle memorie del Kopp; in esse trovansi anche le temperature calcolate. Sarebbe stato facilissimo calcolare molti altri numeri, ma non potendo porli a confronto colle osservazioni me ne astenni; bensì calcolai i volumi alla temperatura della rispettiva ebollizione per tutti quei composti, pei quali era stato osservato il volume alla temperatura ordinaria, giacchè può farsi un confronto fra tali valori. Il Kopp ammette che per ogni grado centigrado il volume dei liquidi di cui si tratta decresca di $\frac{1}{975}$ partendo dalla temperatura della loro ebollizione.

Si ricordi che nell'Idrato metilico, Formiato metilico, ecc. ecc. entra l'Ossido di metile, e che nell'Iodido metilico, ecc. entra il metile senza ossigeno.

TAVOLA IV.

Che dimostra come la sostituzione di Cl_2 *a* H_2 *accresca il peso dell'equivalente di* **34,5**, *il volume del medesimo di* **12,8**, *e la temperatura dell'ebollizione di* **24°**.

	Equivalente chimico		Volume dell' equivalente		Temperat. dell' ebollizione		
	Formula	Peso	osserv.	calcolata	osserv.	calcol.	
Ossido metilico	$H^3_2 . C^2 O$	23					
(Sostituzione del cloro)	$H^2_2 Cl_2 . C^2 O$	57,5	43,8	44,8			Come nella tavola III.
	$H_2 Cl^2_2 . C^2 O$	92	92	57,6			
Ossido etilico	$H^5_2 C^4 O$	37	51	51			Come nella tavola III.
	$H^3_2 Cl^2_2 . C^4 O$	106	71	76			
Formiato etilico	$H^6_2 C^6 O^4$	74	82	81			Come nella tavola III.
	$H^4_2 Cl^2_2 . C^6 O^4$	143	114	106,6			
Acetato etilico	$H^8_2 C^8 O^4$	88	99	100			
	$H^6_2 Cl^2_2 . C^8 O^4$	157	121	125,6			
Acetato metilico	$H^6_2 C^6 O^4$	74	81	81			
	$H^4_2 Cl^2_2 . C^6 O^4$	143	113	106,6			
Acido acetico idrato	$H^4_3 C^4 O^4$	60	56	56	120°.	118°.	
Acido cloroacetico	$H_2 Cl^3_2 . C^4 O^4$	163,5	101	94,4	195°.	190°.	
Solfuro di etile	$H^5_2 C^4 S$	45	55		73°.		
	$H_2 Cl^4_2 . C^4 S$	183	109	106,2	160°.	169°.	Partendo dal preced.
Cloruro di metile	$H^3_2 C^2 + Cl_2$	50.5					
	$H^2_2 Cl_2 . C^2 + Cl_2$	85	63		30°.5		
	$H_2 Cl^2_2 . C^2 + Cl_2$	119,5	81	75,8	60.8	54°.5	Partendo dal preced.
	$Cl^3_2 . C^2 + Cl_2$	154	96	88,6	78°.	78°.5	
Cloruro di etile	$H^5 C^4 + Cl^2$	64,5	74				
(Liquor degli Olandesi)	$H^4_2 Cl_2 . C^4 + Cl_2$	99	84	86,8			Partendo dal preced.
	$H^3_2 Cl^2_2 . C^4 + Cl_2$	133,5	97	99,6			
	$H^2_2 Cl^3_2 . C^4 + Cl_2$	168	110	112,4			
	$H_2 Cl^4_2 . C^4 + Cl_2$	202,5	123	125,2			
	$Cl^6_2 C^4$	237	118	138			
Aldeide	$H^4_2 C^4 O^2$	44	56		21°.8		
Cloral	$H_2 Cl^3_2 C^4 O^2$	147,5	98	94.4	94°.	93°.8	Partendo dal preced.

TAVOLA V.

Dei volumi degli equivalenti di alcuni corpi.

Da questa tavola apparisce che i corpi chimicamente simili hanno volumi eguali, il che, secondo il Kopp, ha pur luogo tra moltissimi corpi composti isomorfi. Sono aggiunti i volumi degli equivalenti di alcuni composti, nei quali il Kopp ammette che un'aggiunta di un equivalente di O accresca il volume di 2,56, qualche volta della metà od anche del doppio; e che se il metallo si unisce, oltre che ad O, anche ad un equivalente d'acido azotico ($A_2 O^5$) o di acido carbonico ($C O^2$) o di acido cromico ($Cr O^3$) o di acido tungstico ($W O^3$) il volume dell'equivalente aumenti di 28,64, o di 12,08, o di 18,24, o di 19,52: per l'acido solforico ($S O^3$) l'aumento è o 14,88 oppure 18,88. Così pure l'equivalente Cl_2 unendosi ad un metallo ne aumenta il volume o di 15,68 oppure di 19,60.

	Segno	Peso	Volume	Vol. ipotet.	Corpi Composti
5 Cloro	$\frac{1}{2} Cl_2$	17,75	12,8		
6 Bromo	$\frac{1}{2} Br_2$	40	12,8		
7 Iodio	$\frac{1}{2} I_2$	63	12,8		
Cianogene	$\frac{1}{2} C^2 A^2$	13	12,8		
2 Solfo	S	16	8		
8 Selenio	Se	39,6	9,2		
9 Fosforo	$\frac{1}{2} P_2$	15,5	8,9		
10 Arsenico	$\frac{1}{2} As_2$	37,5	6,4		
16 Antimonio	$\frac{1}{2} Sb_2$	64,5	9,6		$Sb O^{\frac{3}{2}} = 76,5$, vol. $13,4 = 9,6 + \frac{3}{2}\, 2,56$ $Sb O^2 = 80,5$, vol. $12,2 = 9,6 + 2,56$
11 Cromo	Cr	28	5,52		$Cr O^{\frac{3}{2}} = 40$, vol. $7,44 = 5,52 + \frac{3}{4} .\, 2,56$
12 Molibdeno	Mo	48	5,52		$Mo O^3 = 72$, vol. $20,88 = 5,52 + 6 .\, 2,56$
13 Tungsteno	W	94,6	5,52		
19 Titanio	Ti	24	4,56		$Ti O^2 = 40$, vol $9,68 = 4,56 + 2 .\, 2,56$
24 Osmio	Os	99,6	4,56		
25 Iridio	Ir	99	4,56		
26 Platino	Pt	99	4.56		
27 Rodio	R	52	4,56		
28 Palladio	Pd	53	4,56		
23 Oro	Au	99,4	5,20		

CONTINUAZIONE DELLA TAVOLA V.

	Segno	Peso	Volume	Vol. ipotet.	Corpi Composti
30 Argento	Ag_{II}	54	5,20		$Ag\,O = 116$, vol. $15,52 = 2.\ 5,20 + 2.\ 2,56$
					$Ag\,Cl_2 = 143,5$, vol. $26,08 = 10,40 + 15,68$
					$Ag\,O + A_2\,O^5 = 170$, vol. $39,0 = 10,4 + 28,64$
					$Ag\,O + S\,O^3 = 156$, vol. $29,3 = 10,4 + 18,88$
29 Mercurio	Hg	101	7,44		$Hg\,O = 109$, vol. $10 = 7,44 + 2,56$
					$Hg\,O^{\frac{1}{2}} = 105$, vol. $10 = 7,44 + 2,56$
					$Hg\,Cl = 118,8$, vol. $17,2 = 7,44 + \frac{1}{2}.\ 19,60$
					$Hg\,Cl_2 = 136,5$, vol. $27 = 7,44 + 19,60$
33 Bismuto	Bi	106	10,8		$Bi\,O^{\frac{3}{2}} = 118$, vol. $14,6 = 10,8 + \frac{3}{2}.\ 2,56$
35 Piombo	Pb	103,6	9,12		$Pb\,O = 111,6$, vol. $11,68 = 9,12 + 2,56$
					$Pb\,Cl_2 = 139$, vol. $24,8 = 9,12 + 15,68$
					$Pb\,O + A_2\,O^5 = 165,6$, vol. $37,76 = 9,12 + 28,64$
					$Pb\,O + C\,O^2 = 133,6$, vol. $21,2 = 9,12 + 12,08$
					$Pb\,O + Cr\,O^3 = 163,6$, vol. $27,36 = 9,12 + 18,24$
					$Pb\,O + W\,O^3 = 230,2$, vol. $28,64 = 9,12 + 19,52$
					$Pb\,O + S\,O^3 = 151,6$, vol. $24 = 9,12 + 14,88$
36 Cadmio	Cd	56	6,48		$Cd\,O = 64$, vol. $9 = 6,48 + 2,56$
					$Cd\,O + C\,O^2 = 86$, vol. $18,56 = 6,48 + 12,08$
34 Stagno	Sn	59	8,08		$Sn\,O = 67$, vol. $10,64 = 8,08 + 2,56$
					$Sn\,O^2 = 75$, vol. $10,64 = 8,08 + 2,56$
40 Zinco	Zn	32	4,64		$Zn\,O = 40$, vol. $7,2 = 4,64 + 2,56$
					$Zn\,O + C\,O^2 = 62$, vol. $14,16 = 4,64 + 12,08$
					questa formula dà un errore molto sensibile
					$Zn\,O + S\,O^3 = 80$, vol. $23,5 = 4,64 + 18,88$
31 Rame	Cu	32	3,52		$Cu\,O = 40$, vol. $6,08 = 3,52 + 2,56$
					$Cu\,O^{\frac{1}{2}} = 36$, vol. $6,08 = 3,52 + 2,56$
					$Cu\,O + S\,O^3 = 80$, vol. $22,4 = 3,52 + 18,88$
37 Cobalto	Co	29,5	3,52		$Co\,O^{\frac{3}{2}} = 41,5$, vol. $7,36 = 3,52 + \frac{3}{2}.\ 2,56$
38 Nichel	Ni	30	3,52		
39 Ferro	Fe	27	3,52		$Fe\,O^{\frac{3}{2}} = 39$, vol. $7,36 = 3,52 + \frac{3}{2}.\ 2,56$
					$Fe\,O + C\,O^2 = 57$, vol. $15,2 = 3,52 + 12,08$ appr.
41 Manganese	Mn	27,7	3,52		$Mn\,O + C\,O^2 = 57,7$, vol. $15,44 = 3,52 + 12,08$ appr.
Ammonio	$H^4_2\,A_2$	18	—	17,44	
48 Magnesio	Mg	12,7	—	3,2	$Mg\,O + C\,O^2 = 42,7$, vol. $14,56 = 3,2 + 12,08$ appr.
					$Mg\,O + S\,O^3 = 60,7$, vol. $22,1 = 3,2 + 18,88$

CONTINUAZIONE DELLA TAVOLA V.

	Segno	Peso	Vo-lume	Vol. ipotet.	Corpi Composti
49 Calcio	Ca	20	—	4,8	$Ca O + C O^2 = 50$, vol. $18,56 = 4,8 + 12,08$ appr.
					$Ca O + W O^3 = 146,6$, vol. $24,3 = 4,8 + 19,52$
					$Ca O + S O^3 = 68$, vol. $23,7 = 4,8 + 18,88$
					$Ca Cl_2 = 55,5$, vol. $24,4 = 4,8 + 19,60$
50 Stronzio	Sr	44	—	8,64	$Sr O + C O^2 = 74$, vol. $20,72 = 8,64 + 12,08$
					$Sr O + A_2 O^5 = 106$, vol. $37,3 = 8,64 + 28,64$
					$Sr O + S O^3 = 92$, vol. $23,5 = 8,64 + 14,88$
					$Sr Cl_2 = 79,5$, vol. $28,2 = 8,64 + 19,60$
51 Bario	Ba	68	—	11,44	$Ba O + C O^2 = 98$, vol. $23,52 = 11,44 + 12,08$
					$Ba O + A_2 O^5 = 130$, vol. $40,1 = 11,44 + 28,64$
					$Ba O + S O = 116$, vol. $26,3 = 11,44 + 14,88$
53 Sodio	Na	23,3	23,36	10,4	$Na O + A_2 O^5 = 85,3$, vol. $39 = 10,4 + 28,64$
					$Na O + C O^2 = 53,3$, vol. $22,5 = 10,4 + 12,08$
					$Na O + S O^3 = 71,3$, vol. $29,3 = 10,4 + 18,88$
					$Na Cl_2 = 58,8$, vol. $26,1 = 10,4 + 15,68$
54 Potassio	K	39	46,64	18,72	$K O + A_2 O^5 = 101$, vol. $47,4 = 18,72 + 28,64$
					$K O + Cr O^3 = 99$, vol. $37 = 18,72 + 18,24$
					$K O + S O^3 = 87$, vol. $33,6 = 18,72 + 14,88$
					$K Cl_2 = 74,5$, vol. $38,3 = 18,72 + 19,60$

TAVOLA VI.

Che presenta la temperatura dell'ebollizione di alcuni composti d'idrogeno e di carbonio, e quella calcolata mediante la formula

$$10{,}4.\,i - 15\,(i + 4 - c)$$

essendo i *e* i *numeri degli equivalenti di idrogeno e di carbonio contenuti in un equivalente del liquido.*

	Equivalente chimico		Temperatura dell'ebollizione		Errore
	Formula	Peso	osserv.	ealeolata	
Carburo del Faraday	$H_2^8 C^8$	56	28°.	23°,2	— 5°.
Benzina	$H_2^6 C^{12}$	78	86°.	92°,4	+ 6°.
Oleene	$H_2^{12} C^{12}$	84	55°.	64°,8	+ 10°.
Retinafta	$H_2^8 C^{14}$	92	108°.	113°,2	+ 5°.
Nafta	$H_2^{13} C^{14}$	97	88°.	90°,2	+ 2°.
Naftene	$H_2^{16} C^{16}$	112	115°.	106°,4	— 9°.
Cumene	$H_2^{12} C^{18}$	120	144°.	154°,8	+ 11°.
Elaene	$H_2^{18} C^{18}$	126	110°.	127°,2	+ 17°.
Naftalina	$H_2^8 C^{20}$	128	212°.	203°,2	— 9°.
Citrene	$H_2^{16} C^{20}$	136	174°.	166°,4	— 8°.
Amilene	$H_2^{20} C^{20}$	140	160°.	148°.	— 12°.

SUGLI INTEGRALI ALGEBRICI

D' UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI,

I CUI TERMINI SONO INTEGRABILI PER MEZZO DI TRASCENDENTI ABELIANE,

E SULLA PROPRIETÀ FONDAMENTALE DI SIMILI TRASCENDENTI

MEMORIA

DEL PROF. SERAFINO RAFAELE MINICH

Gli integrali delle funzioni algebriche, le quali non involgono altra espressione irrazionale della variabile indipendente, che la radice quadrata d'una funzione intera di grado superiore al 4°, portano il nome di trascendenti Abeliane in onore del celebre N. E. Abel, che scoperse la proprietà fondamentale di simili funzioni analoga a quella delle trascendenti ellittiche (*Nota I*). Questo nome fu loro imposto, anzichè quello di funzioni ultra-ellittiche, dall' insigne analista C. G. J. Jacobi, che nell'eccellente produzione intitolata — *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis* — (*Journal für die reine und angewandte Mathematik von A. L. Crelle* — Berlino 1832 — T. IX p. 394) maestrevolmente dedusse le proprietà principali delle funzioni inverse di simili trascendenti. Dal teorema dell'Abel intorno alle predette funzioni lo stesso Jacobi arguì l'esistenza degli integrali algebrici d'un sistema di equazioni differenziali, i cui termini sono integrabili per tra-

scendenti Abeliane, e propose a' geometri di rintracciare siffatti integrali scrivendo: — *Ita etiam operae pretium fore credimus*... n — 1 *illarum aequationum differentialium inter* n *variabiles* n — 1 *integralia completa algebraica per methodos directas integrationis investigare, atque ita nova nec minus singulari demonstratione theorema Abelianum adornare.*

La ricerca dei richiesti integrali algebrici è appunto il soggetto della Parte I della presente Memoria. Ma dopo la comunicazione di questa parte del mio lavoro all'I. R. Istituto Veneto nell'Adunanza 10 Agosto 1846, avendo esaminato parecchi volumi del citato Giornale di Matematiche del sig. Crelle trovai, che il valente analista sig. Richelot nel T. XXIII p. 354 avea già dedotto dal teorema dell'Abel con ingegnosa eliminazione i cercati integrali algebrici sotto forme diverse da quelle ch'io sono per esporre, attesochè involgono $n-1$ radici dell'equazione algebrica, il cui 1° membro è la funzione intera posta sotto il segno di radice quadrata. Una sola delle formule da me proposte venne pur conseguita dal sig. Richelot, ed è quella che conserva tutta l'analogia col noto integrale algebrico (Euleri *Institutiones calculi integralis* Vol. IV Supplementum VIII) dell'equazione a due variabili, i cui termini s'integrano per trascendenti ellittiche di 1ª specie. Le formule del Richelot vennero poscia dedotte dall'illustre Jacobi nel T. XXIV del Giornale del sig. Crelle p. 28, pel caso in cui la funzione sotto il segno radicale sia del grado $2n-1$, mediante una dotta analisi ch'egli riguarda come una estensione di quella adoperata da Lagrange (*Miscellanea Taurinensia* T. IV) per conseguire l'integrale algebrico Euleriano della equazione a due variabili testè mentovata.

Avendo così rivolto l'attenzione a' primi risultati di queste mie ricerche, osservai che l'analisi, mercè la quale io pervenni agli integrali algebrici delle $n-1$ equazioni proposte, serviva ancora all'integrazione di due nuovi sistemi di equazioni differenziali coll'uso delle sole trascendenti dell'algebra elementare, e che ne risultava qual corollario la proprietà principale delle trascendenti Abeliane. Aggiunsi pertanto alla Parte I del mio lavoro una appendice ch'è la Parte II comunicata all'I. R. Istituto nell'Adunanza 30 Gennaio 1847, e per comodità del

lettore premetto un breve sunto de' varii articoli, in cui si divide la presente Memoria.

Nella Parte I dopo di avere sviluppata l'analisi (§§ I, II, III), mercè la quale si perviene agli integrali richiesti, si dimostra (§ IV) la coesistenza colle date equazioni (1) ad integrarsi di $n-1$ equazioni fra loro distinte, che sono le differenziali esatte di altrettante funzioni algebriche, e si hanno quindi immediatamente gli integrali algebrici delle equazioni proposte. In seguito (§§ V, VI) si eseguiscono gli sviluppi delle espressioni di questi integrali, e si stabiliscono alcune singolari identità; indi osservando (§ VII) che il sistema delle date equazioni (1) si conserva immutato, se alle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ vengano sostituite le quantità reciproche, ed a' coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ della funzione sottoposta al segno radicale (2) si sostituiscano le rispettive quantità della stessa serie scritta nell'ordine opposto, si passa a dedurre nuove espressioni degli integrali algebrici delle equazioni (1). Altre espressioni di siffatti integrali risultano agevolmente (§ VIII) dall'analisi che serve di base a tutte queste ricerche, e simultaneamente si integra l'equazione (3) col mezzo di sole quantità algebriche se la funzione sotto il segno radicale è del grado $2n-1$, e coll'uso di trascendenti logaritmiche o circolari se quella funzione è del grado $2n$. Si assegnano infine (§ IX) i fattori per cui moltiplicate le equazioni (1) e sommate insieme offrono una differenziale esatta $d\varphi = 0$, supponendo di conoscere uno degli integrali $\varphi = cost.$ delle date equazioni (1), e se ne ricava qual Corollario una speciale equazione identica.

Nella Parte II di questo lavoro, ritenuta X una funzione di x della forma (2), cioè intera e razionale, di grado non superiore a $2n$, e ponendo (79)

$$\int_0^x \frac{x^r\, dx}{\sqrt{X}} = \Phi_r(x),$$

si accenna in qual modo dagli integrali delle (1) (3) si desumono le $n-1$ relazioni algebriche fra gli argomenti $x_1, x_2, \ldots x_n$ di più trascendenti Abeliane e quelli $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ di $n-1$ simili funzioni, alla cui somma si riduce l'aggregato delle n funzioni precedenti, sup-

posto r suscettibile de' valori $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ (§ X). Poscia osservando (§§ XI, XII) che colle equazioni (1) (3) si integrano algebricamente i due sistemi delle equazioni (86) (87), si dimostra la riduzione della somma di n trascendenti $\Phi^r(x_1)$, $\Phi_r(x_2), \ldots \Phi_r(x_n)$ a quella di $n-1$ consimili trascendenti $\Phi_r(b_1)$, $\Phi_r(b_2), \ldots \Phi_r(b_{n-1})$, qualunque sia l'intero r, coll'ammettere le suddette relazioni algebriche fra i rispettivi argomenti. Si prova in seguito (§ XIII) che non occorre di protrarre l'integrazione delle equazioni (86) oltre il valore $2n-2$ del numero r, attesochè le trascendenti Abeliane di qualsivoglia classe si possono ridurre a $2n-1$ trascendenti della forma $\Phi_r(x)$, in cui r assume i valori $0, 1, 2, 3, \ldots 2n-2$. Chiudono questa Memoria (§ XIV) alcune osservazioni sul modo di ridurre a forma razionale gli integrali algebrici delle equazioni (1), e qualche applicazione delle teorie generali a' più facili esempii.

PARTE I.

---

§ I.

Date le $n-1$ equazioni di 1° ordine ad n variabili

$$(1)\qquad \frac{d x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{d x_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{d x_n}{\sqrt{X_n}} = 0,$$

$$\frac{x_1\, d x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2\, d x_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n\, d x_n}{\sqrt{X_n}} = 0,$$

$$\frac{x_1^2\, d x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^2\, d x_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n^2\, d x_n}{\sqrt{X_n}} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_1^{n-2}\, d x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2}\, d x_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}\, d x_n}{\sqrt{X_n}} = 0.$$

in cui si suppone che X_1, $X_2, \ldots X_n$ sieno funzioni simili intere e razionali, di grado non superiore a $2n$, delle rispettive variabili x_1, $x_2, \ldots x_n$, cioè in generale (*Nota II*)

$$(2)\qquad X_m = \sum_{p=0}^{p=2n+1} a_p\, x_m^{2n-p}\,;$$

trattasi di conseguire sotto forma del tutto esplicita gli integrali algebraici delle equazioni (1), l'esistenza de' quali si desume dal teorema Abeliano giusta l'osservazione del celebre Jacobi.

Pongasi

$$(3)\qquad \frac{x_1^{n-1}\, d x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-1}\, d x_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n^{n-1}\, d x_n}{\sqrt{X_n}} = d\,t,$$

cosicchè x_1, $x_2, \ldots x_n$ si potranno riguardare come funzioni d'una nuova variabile t. Per ricavare agevolmente dalle n equazioni (1) (3)

i valori degli elementi dx_1, dx_2, ... dx_n, si rappresenti in generale con $(-1)^r s_r$ la somma de' prodotti costituiti dalle combinazioni ad r ad r delle variabili x_1, x_2, ... x_n, e si assuma in conseguenza

$$(4)\qquad (u-x_1)(u-x_2)\ldots(u-x_n)=u^n+s_1u^{n-1}+s_2u^{n-2}+\ldots+s_n=f(u);$$

di più denotando con $(-1)^{r-1}s_{r-1}^{(m)}$ la somma de' prodotti risultanti dalle combinazioni ad $r-1$ ad $r-1$ delle variabili x_1, x_2, ... x_n, esclusa la x_m, si stabilisca

$$(5)\qquad \frac{f(u)}{u-x_m}=u^{n-1}+s_1^{(m)}u^{n-2}+s_2^{(m)}u^{n-3}+\ldots+s_{n-1}^{(m)},$$

e dal confronto della espressione (4) di $f(u)$ con quella che proviene dal moltiplicare l'equazione (5) per $u-x_m$ avremo le note relazioni

$$(6)\qquad s_1^{(m)}-x_m=s_1,\quad s_2^{(m)}-x_ms_1^{(m)}=s_2,\ \ldots\ s_{r-1}^{(m)}-x_ms_{r-2}^{(m)}=s_{r-1},$$

donde si raccoglie mercè le successive sostituzioni

$$(7)\qquad s_{r-1}^{(m)}=s_{r-1}+s_{r-2}x_m+s_{r-3}x_m^2+\ldots+s_1x_m^{r-2}+x_m^{r-1}.$$

Ora la funzione (5) manifestamente va a zero per ciascuno de' valori x_1, x_2, ... x_n di u, eccetto $u=x_m$, pel quale riducendosi a $\frac{0}{0}$ diviene

$$(8)\qquad f'(x_m)=x_m^{n-1}+s_1^{(m)}x_m^{n-2}+\ldots+s_{n-1}^{(m)}=(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_n).$$

Pertanto se moltiplichiamo le equazioni (1) pe' rispettivi fattori $s_{n-1}^{(m)}$, $s_{n-2}^{(m)}$, ... $s_1^{(m)}$, e le sommiamo colla (3), otterremo

$$\frac{f'(x_m)\,dx_m}{\sqrt{X_m}}=dt,$$

e quindi attribuendo all' indice m tutti i valori $1, 2, 3, \ldots n$, avremo

$$(9)\qquad dx_1=\frac{\sqrt{X_1}}{f'(x_1)}dt,\quad dx_2=\frac{\sqrt{X_2}}{f'(x_2)}dt,\ \ldots\ dx_n=\frac{\sqrt{X_n}}{f'(x_n)}dt.$$

Ciò premesso, siccome le quantità $s_1^{(m)}$, $s_2^{(m)}$, ... $s_{n-1}^{(m)}$ non contengono x_m, col differenziare rapporto ad x_m l'ultima delle relazioni (6), ove si scriva r in luogo di $r-1$, si rinviene

$$(10)\qquad \left(\frac{ds_r}{dx_m}\right)=-s_{r-1}^{(m)},$$

e conseguentemente la differenziale totale di s_r sarà

$$\mathrm{d}\,s_r = \left(\frac{\mathrm{d}\,s_r}{\mathrm{d}\,x_1}\right)\mathrm{d}\,x_1 + \ldots + \left(\frac{\mathrm{d}\,s_r}{\mathrm{d}\,x_n}\right)\mathrm{d}\,x_n = -\left\{s_{r-1}^{(1)}\,\mathrm{d}\,x_1 + s_{r-1}^{(2)}\,\mathrm{d}\,x_2 + \ldots + s_{r-1}^{(n)}\,\mathrm{d}\,x_n\right\};$$

per lo che introducendo in questa espressione i valori (9) degli elementi $\mathrm{d}\,x_1, \ldots \mathrm{d}\,x_n$, e ponendo

$$(11) \qquad \frac{s_{r-1}^{(1)}\sqrt{X_1}}{f'(x_1)} + \frac{s_{r-1}^{(2)}\sqrt{X_2}}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{s_{r-1}^{(n)}\sqrt{X_n}}{f'(x_n)} = z_r,$$

troviamo

$$(12) \qquad \frac{\mathrm{d}\,s_r}{\mathrm{d}\,t} = -\,z_r.$$

Se poi sostituiamo nella (11) ad $s_{r-1}^{(1)}$, $s_{r-1}^{(2)}$, ... $s_{r-1}^{(n)}$ i loro valori desunti dalla formola (7), e poniamo

$$(13) \qquad \frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{f'(x_1)} + \frac{x_2^{p-1}\sqrt{X_2}}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^{p-1}\sqrt{X_n}}{f'(x_n)} = v_p,$$

ne viene ad evidenza

$$(14) \qquad z_r = s_{r-1}\,v_1 + s_{r-2}\,v_2 + \ldots + s_1\,v_{r-1} + v_r,$$

e quindi a cagione della (12) si ricava

$$(15) \qquad \frac{\mathrm{d}\,z_r}{\mathrm{d}\,t} = s_{r-1}\frac{\mathrm{d}\,v_1}{\mathrm{d}\,t} + s_{r-2}\frac{\mathrm{d}\,v_2}{\mathrm{d}\,t} + \ldots + s_1\frac{\mathrm{d}\,v_{r-1}}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\mathrm{d}\,v_r}{\mathrm{d}\,t}$$
$$-\left\{v_1\,z_{r-1} + v_2\,z_{r-2} + \ldots + v_{r-1}\,z_1\right\}.$$

§ II.

Per conseguire l'ulteriore sviluppo del $\frac{\mathrm{d}\,z_r}{\mathrm{d}\,t}$, è mestieri formare l'espressione del $\frac{\mathrm{d}\,v_p}{\mathrm{d}\,t}$. A tal uopo differenziando la (13) otteniamo dapprima

$$\frac{d v_p}{d t}=\left\{\frac{(p-1)x_1^{p-2}\sqrt{X_1}}{f'(x_1)}+\frac{\frac{1}{2}x_1^{p-1}X_1'}{f'(x_1)\sqrt{X_1}}\right\}\frac{d x_1}{d t}+\ldots+\left\{\frac{(p-1)x_n^{p-2}\sqrt{X_n}}{f'(x_n)}+\frac{\frac{1}{2}x_n^{p-1}X_n'}{f'(x_n)\sqrt{X_n}}\right\}\frac{d x_n}{d t}$$

$$-\frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{f'(x_1)}\left\{\frac{d x_1-d x_2}{(x_1-x_2)d t}+\frac{d x_1-d x_3}{(x_1-x_3)d t}+\ldots+\frac{d x_1-d x_n}{(x_1-x_n)d t}\right\}$$

$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{x_n^{p-1}\sqrt{X_n}}{f'(x_n)}\left\{\frac{d x_n-d x_1}{(x_n-x_1)d t}+\frac{d x_n-d x_2}{(x_n-x_2)d t}+\ldots+\frac{d x_n-d x_{n-1}}{(x_n-x_{n-1})d t}\right\};$$

poscia, introdotti in questa formula i valori (9) di $d x_1, \ldots d x_n$, avremo

$$(16)\qquad \frac{d v_p}{d t}=\frac{(p-1)x_1^{p-2}X_1+\frac{1}{2}x_1^{p-1}X_1'}{\overline{f'(x_1)}^2}+\ldots+\frac{(p-1)x_n^{p-2}X_n+\frac{1}{2}x_n^{p-1}X_n'}{\overline{f'(x_n)}^2}$$

$$-\frac{x_1^{p-1}X_1}{\overline{f'(x_1)}^2}\left\{\frac{1}{x_1-x_2}+\frac{1}{x_1-x_3}+\ldots+\frac{1}{x_1-x_n}\right\}-\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{x_n^{p-1}X_n}{\overline{f'(x_n)}^2}\left\{\frac{1}{x_n-x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\right\}$$

$$+\left(\frac{x_1^{p-1}-x_2^{p-1}}{x_1-x_2}\right)\frac{\sqrt{X_1X_2}}{f'(x_1)f'(x_2)}+\ldots+\left(\frac{x_1^{p-1}-x_n^{p-1}}{x_1-x_n}\right)\frac{\sqrt{X_1X_n}}{f'(x_1)f'(x_n)}$$

$$+\left(\frac{x_2^{p-1}-x_3^{p-1}}{x_2-x_3}\right)\frac{\sqrt{X_2X_3}}{f'(x_2)f'(x_3)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{x_{n-1}^{p-1}-x_n^{p-1}}{x_{n-1}-x_n}\right)\frac{\sqrt{X_{n-1}X_n}}{f'(x_{n-1})f'(x_n)}.$$

D'altra parte, se facciamo il prodotto de' valori di v_q, v_{p-q} desunti dalla formula (7), troviamo

$$v_q v_{p-q}=\frac{x_1^{p-2}X_1}{\overline{f'(x_2)}^2}+\frac{x_2^{p-2}X_2}{\overline{f'(x_2)}^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x_n^{p-2}X_n}{\overline{f'(x_n)}^2}$$

$$+\frac{(x_1^{q-1}x_2^{p-q-1}+x_2^{q-1}x_1^{p-q-1})\sqrt{X_1X_2}}{f'(x_1)f'(x_2)}+\ldots+\frac{(x_1^{q-1}x_n^{p-q-1}+x_n^{q-1}x_1^{p-q-1})\sqrt{X_1X_n}}{f'(x_1)f'(x_n)}$$

$$+\frac{(x_2^{q-1}x_3^{p-q-1}+x_3^{q-1}x_2^{p-q-1})\sqrt{X_2X_3}}{f'(x_2)f'(x_3)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(x_{n-1}^{q-1}x_n^{p-q-1}+x_n^{q-1}x_{n-1}^{p-q-1})\sqrt{X_{n-1}X_n}}{f'(x_{n-1})f'(x_n)},$$

e sostituendo in questa equazione all'indice q i successivi numeri 1, 2, 3, ... $p-1$, ricaviamo altrettante eguaglianze dalla cui somma, a cagione delle identità simili alla seguente, in cui p si ritiene positivo,

$$\frac{x_1^{p-1}-x_2^{p-1}}{x_1-x_2}=x_1^{p-2}+x_1^{p-3}x_2+x_1^{p-4}x_2^2+\ldots+x_1x_2^{p-3}+x_2^{p-2},$$

risulta

$$\begin{aligned}(17)\qquad c_1c_{p-1}+c_2c_{p-2}+\ldots+c_{p-1}c_1 &= \frac{(p-1)x_1^{p-2}X_1}{f'(x_1)^2}+\frac{(p-1)x_2^{p-2}X_2}{f'(x_2)^2}+\ldots+\frac{(p-1)x_n^{p-2}X_n}{f'(x_n)^2}\\ &+2\left(\frac{x_1^{p-1}-x_2^{p-1}}{x_1-x_2}\right)\frac{\sqrt{X_1X_2}}{f'(x_1)f'(x_2)}+\ldots+2\left(\frac{x_1^{p-1}-x_n^{p-1}}{x_1-x_n}\right)\frac{\sqrt{X_1X_n}}{f'(x_1)f'(x_n)}\\ &+2\left(\frac{x_2^{p-1}-x_3^{p-1}}{x_2-x_3}\right)\frac{\sqrt{X_2X_3}}{f'(x_2)f'(x_3)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots+2\left(\frac{x_{n-1}^{p-1}-x_n^{p-1}}{x_{n-1}-x_n}\right)\frac{\sqrt{X_{n-1}X_n}}{f'(x_{n-1})f'(x_n)}.\end{aligned}$$

Per conseguenza sottraendo questa equazione dalla (16) moltiplicata per 2, si desume

$$\begin{aligned}2\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}t}-\{c_1c_{p-1}+c_2c_{p-2}+\ldots+c_{p-1}c_1\} &= \frac{(p-1)x_1^{p-2}X_1+x_1^{p-1}X_1'}{f'(x_1)^2}+\ldots+\frac{(p-1)x_n^{p-2}X_n+x_n^{p-1}X_n'}{f'(x_n)^2}\\ &-\frac{2x_1^{p-1}X_1}{f'(x_1)^2}\left\{\frac{1}{x_1-x_2}+\frac{1}{x_1-x_3}+\ldots+\frac{1}{x_1-x_n}\right\}\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-\frac{2x_n^{p-1}X_n}{f'(x_n)^2}\left\{\frac{1}{x_n-x_1}+\frac{1}{x_n-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\right\};\end{aligned}$$

cioè, adottato il segno D_x per indicare la derivata rapporto ad x, si raccoglie la formula

$$\begin{aligned}(18)\qquad 2\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}t} &= c_1c_{p-1}+c_2c_{p-2}+c_3c_{p-3}+\ldots+c_{p-1}c_1\\ &+D_{x_1}\frac{x_1^{p-1}X_1}{f'(x_1)^2}+D_{x_2}\frac{x_2^{p-1}X_2}{f'(x_2)^2}+\ldots+D_{x_n}\frac{x_n^{p-1}X_n}{f'(x_n)^2},\end{aligned}$$

la cui finale riduzione si ottiene nel modo seguente dalla teoria dello spezzamento delle frazioni razionali.

§ III.

Prendasi a decomporre la frazione $\frac{u^{p-1}U}{\overline{f(u)}^2}$ in cui si suppone U una funzione di u simile ad $X_1, X_2, \ldots X_n$ (2), ed $f(u)$ è la nota funzione (4). Siccome il numeratore della frazione proposta ha un grado che eccede di $p-1$ unità quello del denominatore, il quoziente Q da aggiungersi al gruppo delle frazioni parziali sarà una funzione di u intera e razionale del grado $p-1$, cioè

$$Q = \sum_{q=1}^{q=p+1} \alpha_{q-1} u^{p-q},$$

e si avrà per le note regole che servono allo spezzamento delle frazioni razionali

$$(19) \quad \frac{u^{p-1}U}{\overline{f(u)}^2} - Q = \frac{x_1^{p-1} X_1}{\overline{f'(x_1)}^2} \frac{1}{(u-x_1)^2} + \frac{x_2^{p-1} X_2}{\overline{f'(x_2)}^2} \frac{1}{(u-x)^2} + \ldots + \frac{x_n^{p-1} X_n}{\overline{f'(x_n)}^2} \frac{1}{(u-x_n)^2}$$

$$+ \frac{1}{u-x_1} D_{x_1} \frac{x_1^{p-1} X_1}{\overline{f'(x_1)}^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{u-x_n} D_{x_n} \frac{x_n^{p-1} X_n}{\overline{f'(x_n)}^2}.$$

Ora assumendo

$$(20) \qquad u^{p-1} U - Q \overline{f(u)}^2 = R,$$

sappiamo che il grado della funzione R è inferiore a $2n$, poichè R evidentemente è il residuo finale della divisione di $u_{p-1} U$ per $\overline{f(u)}^2$. Sarà dunque in generale R della forma seguente (*Nota III*):

$$R = \alpha_p u^{2n-1} + \alpha^{(p+1)} u^{2n-2} + \alpha^{(p+2)} u^{2n-3} + \ldots \alpha^{(p+2n-1)},$$

ed inserendo nella (20) questo sviluppo di R, come pure le espressioni di Q, di U (2), e di $f(u)$ (4), si avrà l'equazione identica

$$u^{p-1}(a_0 u^{2n} + a_1 u^{2n-1} + \ldots + a_{p-1} u^{2n-p+1} + a_p u^{2n-p} + \ldots + a_{2n})$$
$$-(\alpha_0 u^{p-1} + \alpha_1 u^{p-2} + \ldots + \alpha_{p-1})(u^n + s_1 u^{n-1} + s_2 u^{n-2} + \ldots + s_n)^2$$
$$= \alpha_p u^{2n-1} + \alpha^{(p+1)} u^{2n-2} + \alpha^{(p+2)} u^{2n-3} + \ldots + \alpha^{(p+2n-1)},$$

da cui, mercè i confronti de' gruppi affetti in ambo i membri dalle

eguali potenze di u non inferiori al grado $2n-1$, scaturiscono le eguaglianze determinanti α_0, α_1, α_2, ... α_p, cioè

$$(21)\qquad \begin{aligned}
&\alpha_0 = a_0\,,\\
&\alpha_1 + 2\,s_1\,\alpha_0 = a_1\,,\\
&\alpha_2 + 2\,s_1\,\alpha_1 + (s_2 + s_1\,s_1 + s_2)\,\alpha_0 = a_2\,,\\
&\alpha_3 + 2\,s_1\,\alpha_2 + (s_2 + s_1\,s_1 + s_2)\,\alpha_1 + (s_3 + s_2\,s_1 + s_1\,s_2 + s_3)\,\alpha_0 = a_3\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_p + 2\,s_1\,\alpha_{p-1} + (s_2 + s_1\,s_1 + s_2)\,\alpha_{p-2} + \dots + (s_p + s_{p-1}\,s_1 + \dots + s_1\,s_{p-1} + s_p)\,\alpha_0 = a_p\,.
\end{aligned}$$

Indi eguagliando il 2° membro della (19) al 2° membro della (20) divisa per $\overline{f(u)}^2$, abbiamo una equazione identica, che moltiplicata per u si può presentare sotto questo aspetto

$$\frac{x_1^{p-1}X_1}{\overline{f'(x_1)}^2}\,\frac{1}{u\left(1-\frac{x_1}{u}\right)^2}+\dots+\frac{x_n^{p-1}X_n}{\overline{f'(x_n)}^2}\,\frac{1}{u\left(1-\frac{x_n}{u}\right)^2}+\frac{1}{1-\frac{x_1}{u}}D_{x_1}\frac{x_1^{p-1}X_1}{\overline{f'(x_1)}^2}+\dots+\frac{1}{1-\frac{x_n}{u}}D_{x_n}\frac{x_n^{p-1}X_n}{\overline{f'(x_n)}^2}$$

$$=\frac{\alpha_p+\alpha^{(p+1)}\frac{1}{u}+\alpha^{(p+2)}\frac{1}{u^2}+\dots+\alpha^{(p+2n-1)}\frac{1}{u^{2n-1}}}{\left(1-\frac{x_1}{u}\right)^2\left(1-\frac{x_2}{u}\right)^2\dots\left(1-\frac{x_n}{u}\right)^2}\,;$$

sicchè ponendo in questa identità $u=\frac{1}{0}$, troviamo

$$(22)\qquad D_{x_1}\frac{x_1^{p-1}X_1}{\overline{f'(x_1)}^2}+D_{x_2}\frac{x_2^{p-1}X_2}{\overline{f'(x_2)}^2}+\dots+D_{x_n}\frac{x_n^{p-1}X_n}{\overline{f'(x_n)}^2}=\alpha_p\,.$$

Conseguentemente la formula (18) diviene

$$(23)\qquad 2\,\frac{d\varphi_p}{dt}=\varphi_1\,\varphi_{p-1}+\varphi_2\,\varphi_{p-2}+\dots+\varphi_{p-2}\,\varphi_2+\varphi_{p-1}\,\varphi_1+\alpha_p\,,$$

e se ne trae col sostituire all'indice p i valori 1, 2, 3, ... r

$$2\frac{d v_1}{dt} = \alpha_1 ,$$

$$2\frac{d v_2}{dt} = v_1^2 + \alpha_2 ,$$

$$2\frac{d v_3}{dt} = v_1 v_2 + v_2 v_1 + \alpha_3 ,$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$2\frac{d v_r}{dt} = v_1 v_{r-1} + v_2 v_{r-2} + \ldots + v_{r-2} v_2 + v_{r-1} v_1 + \alpha_r .$$

Queste eguaglianze rispettivamente moltiplicate per s_{r-1}. s_{r-2}. $\ldots$ s_1, 1 e sommate insieme esibiscono, a cagione della (14),

$$2\left(s_{r-1}\frac{d v_1}{dt} + s_{r-2}\frac{d v_2}{dt} + \ldots + \frac{d v_r}{dt}\right) = \alpha_1 s_{r-1} + \alpha_2 s_{r-2} + \ldots + \alpha_{r-1} s_1 + \alpha_r$$
$$+ v_1 z_{r-1} + v_2 z_{r-2} + \ldots + v_{r-1} z_1 ,$$

e dalla somma della presente eguaglianza colla (15) moltiplicata per 2 si deduce infine

$$(24) \qquad 2\frac{d z_r}{dt} = \alpha_1 s_{r-1} + \alpha_2 s_{r-2} + \ldots + \alpha_{r-1} s_1 + \alpha_r$$
$$- \{ v_1 z_{r-1} + v_2 z_{r-2} + \ldots + v_{r-1} z_1 \} .$$

§ IV

Vuolsi presentemente dimostrare che aggiungendo alla formula (24) il termine $2\alpha_0 s_r$ si ha una funzione ϱ_{r-1}, la cui differenziale va a zero congiuntamente al sistema delle equazioni (1).

Poniamo infatti

$$(25) \qquad \alpha_0 = \beta_0 ,$$
$$\alpha_1 + s_1 \alpha_0 = \beta_1 ,$$
$$\alpha_2 + s_1 \alpha_1 + s_2 \alpha_0 = \beta_2 ,$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$\alpha_r + s_1 \alpha_{r-1} + s_2 \alpha_{r-2} + \ldots + s_{r-1} \alpha_1 + s_r \alpha_0 = \beta_r .$$

e dalle relazioni (21) ricaveremo

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\beta_0 = a_0\,, \\ &\beta_1 + s_1\beta_0 = a_1\,, \\ &\beta_2 + s_1\beta_1 + s_2\beta_0 = a_2\,, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\beta_r + s_1\beta_{r-1} + s_2\beta_{r-2} + \ldots + s_{r-1}\beta_1 + s_r\beta_0 = a_r\,, \end{aligned}$$

e la formula (24), a cagione dell'ultima delle equazioni (25), e per l'eguaglianza $\alpha_0 = a_0$, diverrà

$$(27)\qquad 2\frac{d z_r}{d t} = \beta_r - a_0 s_r - \{v_1 z_{r-1} + v_2 z_{r-2} + \ldots + v_{r-1} z_1\}\,;$$

cosicchè aumentando questa espressione di $2\alpha_0 s_r$, cioè assumendo

$$(28)\qquad \beta_r + \alpha_0 s_r - \{v_1 z_{r-1} + v_2 z_{r-2} + \ldots + v_{r-1} z_1\} = \nu_{r-1}\,,$$

ci proponiamo di provare che col sistema delle equazioni (1) ha luogo l'eguaglianza

$$(29)\qquad d\,\nu_{r-1} = 0\,.$$

A tal uopo differenziando le equazioni (26), e ricordando la relazione (12), abbiamo

$$(30)\qquad \begin{aligned} &\frac{d\beta_1}{dt} = \beta_0 z_1\,, \\ &\frac{d\beta_2}{dt} + s_1\frac{d\beta_1}{dt} = \beta_0 z_2 + \beta_1 z_1\,, \\ &\frac{d\beta_3}{dt} + s_1\frac{d\beta_2}{dt} + s_2\frac{d\beta_1}{dt} = \beta_0 z_3 + \beta_1 z_2 + \beta_2 z_1\,, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\frac{d\beta_r}{dt} + s_1\frac{d\beta_{r-1}}{dt} + \ldots + s_{r-1}\frac{d\beta_1}{dt} = \beta_0 z_r + \beta_1 z_{r-1} + \ldots + \beta_{r-1} z_1\,; \end{aligned}$$

ma dal sommare insieme le relazioni (25) rispettivamente moltiplicate

per le quantità γ_r, γ_{r-1}, γ_{r-2}, ... γ_1, γ_0, che si suppongono dedotte dalle eguaglianze

$$
\begin{aligned}
(31) \qquad & \gamma_0 = 1, \\
& \gamma_1 + s_1 \gamma_0 = 0, \\
& \gamma_2 + s_1 \gamma_1 + s_2 \gamma_0 = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \gamma_r + s_1 \gamma_{r-1} + s_2 \gamma_{r-2} + \ldots + s_{r-1} \gamma_1 + s_r \gamma_0 = 0,
\end{aligned}
$$

si ricava

$$
(32) \qquad \alpha_r = \beta_r + \gamma_1 \beta_{r-1} + \gamma_2 \beta_{r-2} + \ldots + \gamma_{r-1} \beta_1 + \gamma_r \beta_0;
$$

in conseguenza, presa la somma delle eguaglianze (30) rispettivamente moltiplicate per γ_r, γ_{r-1}, ... γ_0, troviamo

$$
(33) \qquad \frac{\mathrm{d}\beta_r}{\mathrm{d}t} = \alpha_0 z_r + \alpha_1 z_{r-1} + \alpha_2 z_{r-2} + \ldots + \alpha_{r-1} z_1 .
$$

Altronde per le formule (23) (27) si ottiene

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\mathrm{d}t} \mathrm{d} \{ v_1 z_{r-1} + v_2 z_{r-2} + \ldots + v_{r-1} z_1 \} = {} & v_1 (\beta_{r-1} - a_0 s_{r-1} - v_1 z_{r-2} - \ldots - v_{r-2} z_1) + z_{r-1} \alpha_1 \\
& + v_2 (\beta_{r-2} - a_0 s_{r-2} - v_1 z_{r-3} + \ldots - v_{r-3} z_1) + z_{r-2} (v_1^2 + \alpha_2) \\
& + v_3 (\beta_{r-3} - a_0 s_{r-3} - v_1 z_{r-4} - \ldots - v_{r-4} z_1) + z_{r-3} (v_1 v_2 + v_2 v_1 + \alpha_3) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + v_{r-1} (\beta_1 - a_0 s_1) + z_1 (v_1 v_{r-2} + v_2 v_{r-3} + \ldots + v_{r-2} v_1 + \alpha_{r-1}),
\end{aligned}
$$

ossia, cancellati i termini eguali fra loro ed opposti di segno, e notata la posizione (14), si rinviene

$$
\begin{aligned}
(34) \qquad \frac{2}{\mathrm{d}t} \mathrm{d} (v_1 z_{r-1} + v_2 z_{r-2} + \ldots + v_{r-1} z_1) = {} & v_1 \beta_{r-1} + v_2 \beta_{r-2} + \ldots + v_{r-1} \beta_1 - a_0 (z_r - v_r) \\
& + \alpha_1 z_{r-1} + \alpha_2 z_{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1} z_1 ,
\end{aligned}
$$

e siccome, prendendo la somma delle equazioni (23), ommessa l'ul-

tima, dopo di averle rispettivamente moltiplicate per v_r, $v_{r-1}, \ldots v_2$, v_1, si ricava, mercè la (14),

$$(35) \qquad \alpha_0 z_r + \alpha_1 z_{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1} z_1 = \beta_0 v_r + \beta_1 v_{r-1} + \beta_2 v_{r-2} + \ldots + \beta_{r-1} v_1 :$$

sottratta la (35) dalla (34), ed avvertita l'eguaglianza $\alpha_0 = \beta_0 = a_0$ (25) (26), avremo

$$(36) \qquad \frac{1}{dt} d\{v_1 z_{r-1} + v_2 z_{r-2} + \ldots + v_{r-1} z_1\} = \alpha_1 z_{r-1} + \alpha_2 z_{r-2} + \ldots + \alpha_{r-1} z_1 .$$

Ora attese le espressioni (33) (36) e la relazione (12), è palese che dalla differenziazione della formula (28) risulta la già enunciata equazione (29), in cui consiste il teorema che si volea dimostrare.

Sostituendo nell'equazione (29) all'indice r i numeri 2, 3,... n abbiamo $n-1$ equazioni differenziali distinte fra loro, e coesistenti colle proposte equazioni (1) di cui divengono le trasformate. Pertanto gli integrali di queste nuove equazioni, cioè

$$(37) \qquad u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad u_3 = c_3, \ldots u_{n-1} = c_{n-1},$$

in cui c_1, $c_2, \ldots c_{n-1}$ rappresentano altrettante costanti arbitrarie, soddisfaranno alle equazioni (1), e ne saranno gli integrali completi algebrici.

Non abbiamo posto nella (29) $r=1$, perchè l'equazione che ne proviene $d u_1 = 0$ è la differenziale dell'equazione identica $u_1 = a_1$ (28) (26), in cui a_1 è una data costante.

§ V.

Conviene adesso liberare dalle (26) il valore della quantità β_r compresa nell'espressione (28) di u_{r-1}.

A questo fine si osservi, che per le relazioni (31) le quantità γ_0, γ_1, $\gamma_2, \ldots \gamma_r$ corrispondono a' coefficienti de' primi $r+1$ termini della serie ricorrente

$$\gamma_0 + \gamma_1 \omega + \gamma_2 \omega^2 + \gamma_3 \omega^3 + \text{ecc.}$$

generata dallo sviluppo in serie della frazione

$$\frac{1}{1+s_1\omega+s_2\omega^2+\ldots+s_n\omega^n},$$

di maniera che assumendo $\omega=\frac{1}{u}$, abbiamo (4)

$$\frac{u^n}{f(u)}=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{u}+\frac{\gamma_2}{u^2}+\ldots+\frac{\gamma_r}{u^r}+\text{ecc.}$$

Risulta poi mercè le regole dello spezzamento delle frazioni

$$\begin{aligned}\frac{u^n}{f(u)}=1&+\frac{x_1^n}{f'(x_1)}\left\{\frac{1}{u}+\frac{x_1}{u^2}+\frac{x_1^2}{u^3}+\ldots+\frac{x_1^{r-1}}{u^r}+\text{ecc.}\right\}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{x_n^n}{f'(x_n)}\left\{\frac{1}{u}+\frac{x_n}{u^2}+\frac{x_n^2}{u^3}+\ldots+\frac{x_n^{r-1}}{u^r}+\text{ecc.}\right\}.\end{aligned}$$

Paragonati quindi fra loro i coefficienti di $\frac{1}{u^r}$ ne' due prefati sviluppi in serie della funzione $\frac{u^n}{f(u)}$, otteniamo

$$(38)\qquad \gamma_r=\frac{x_1^{n+r-1}}{f'(x_1)}+\frac{x_2^{n+r-1}}{f'(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^{n+r-1}}{f'(x_n)},$$

e per $r=0$ essendo (32) $\gamma_0=1$, troviamo l'identità

$$(39)\qquad \frac{x_1^{n-1}}{f'(x_1)}+\frac{x_2^{n-1}}{f'(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^{n-1}}{f'(x_n)}=1,$$

che viene comprovata dal porre nell'equazione (5) i valori (9) di dx_1, $dx_2, \ldots\, dx_n$. Questi valori introdotti nelle equazioni (1) darebbero le identità

$$(40)\qquad \begin{aligned}&\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}+\ldots+\frac{1}{f'(x_n)}=0,\\&\frac{x_1}{f'(x_1)}+\frac{x_2}{f'(x_2)}+\ldots+\frac{x_n}{f'(x_n)}=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\frac{x_1^{n-2}}{f'(x_1)}+\frac{x_2^{n-2}}{f'(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}}{f'(x_n)}=0,\end{aligned}$$

già trovate come pure la (39) dall' Eulero (*Institutiones Calculi integralis* Vol. II Sect. II Cap. III), e dimostrate da N. Fuss in una Memoria inserita negli Atti dell' I. Accademia di Pietroburgo per l'anno 1777 (Parte I p. 91).

I valori di γ_1, γ_2, γ_3, ecc. si possono di mano in mano desumere dalle equazioni (31), ed esprimere per mezzo di formule che a primo tratto sono più semplici delle corrispondenti espressioni (38), ma che si vanno sempre più complicando al crescere dell' indice r. Abbiamo infatti dalla immediata risoluzione delle (31)

$$(41)\qquad \begin{aligned} \gamma_1 &= -s_1\,, \\ \gamma_2 &= s_1 s_1 - s_2\,, \\ \gamma_3 &= -\{(s_1 s_1 - s_2) s_1 - s_1 s_2 + s_3\}\,, \\ \gamma_4 &= \{(s_1 s_1 - s_2) s_1 - s_1 s_2 + s_3\} s_1 - (s_1 s_1 - s_2) s_2 + s_1 s_3 - s_4\,. \\ &\text{ecc.} \end{aligned}$$

Il confronto di queste formule colle espressioni (38) somministra la serie delle seguenti equazioni identiche

$$(42)\qquad \begin{aligned} &\frac{x_1^n}{f'(x_1)} + \frac{x_2^n}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^n}{f'(x_n)} = -s_1\,, \\ &\frac{x_1^{n+1}}{f'(x_1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x_n^{n+1}}{f'(x_n)} = s_1 s_1 - s_2\,, \\ &\frac{x_1^{n+2}}{f'(x_1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x_n^{n+2}}{f'(x_n)} = -\{(s_1 s_1 - s_2) s_1 - s_1 s_2 + s_3\}\,. \\ &\text{ecc.} \end{aligned}$$

e surrogando nelle (42) alle variabili x_1, x_2, ... x_n le rispettive reciproche $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, ... $\frac{1}{x_n}$, ed avvertendo che per simili sostituzioni s_r si cangia in $\frac{s_{n-r}}{s_n}$, ed $f'(x_m)$ diviene $-\frac{f'(x_m)}{s_n x_m^{n-2}}$, otterremo identicamente

$$(43)\qquad \frac{1}{x_1 f'(x_1)}+\frac{1}{x_2 f'(x_2)}+\ldots+\frac{1}{x_n f'(x_n)}=-\frac{1}{s_n},$$

$$\frac{1}{x_1^2 f'(x_1)}+\frac{1}{x_2^2 f'(x_2)}+\ldots+\frac{1}{x_n^2 f'(x_n)}=\frac{1}{s_n}.\frac{s_{n-1}}{s_n},$$

$$\frac{1}{x_1^3 f'(x_1)}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{x_n^3 f'(x_n)}=-\frac{1}{s_n}\left\{\frac{s_{n-1}}{s_n}\frac{s_{n-1}}{s_n}-\frac{s_{n-2}}{s_n}\right\},$$

ecc.

Conosciuti i valori (38) (41) di γ_1, γ_2, γ_3, ecc. (*Nota IV*), si otterrà il valore di β_r sommando insieme le equazioni (26) rispettivamente moltiplicate per $\gamma_r, \gamma_{r-1}, \ldots \gamma_1, \gamma_0$. Ne risulta a cagione delle (31)

$$(44)\qquad \beta_r=a_r\gamma_0+a_{r-1}\gamma_1+a_{r-2}\gamma_2+\ldots+a_1\gamma_{r-1}+a_0\gamma_r.$$

La funzione ν_{r-1} (28) si potrebbe esprimere oltrechè per β_r, s_1, $s_2, \ldots s_r$, mediante le sole funzioni φ_1, φ_2, $\varphi_3, \ldots \varphi_{r-1}$ (15), oppure mercè le sole z_1, z_2, $z_3 \ldots z_{r-1}$ (11), attesa la relazione (14) da cui vicendevolmente si può dedurre

$$(45)\qquad \varphi_r=\gamma_{r-1}z_1+\gamma_{r-2}z_2+\ldots+\gamma_1 z_{r-1}+z_r.$$

Se poi sommiamo colla (28) le eguaglianze che ne risultano, postovi in luogo di r i numeri $r-1$, $r-2, \ldots 2$, 1, dopo di averle rispettivamente moltiplicate per s_1, $s_2, \ldots s_{r-2}$, s_{r-1}, otterremo (26) (14)

$$(46)\qquad \nu_{r-1}+s_1\nu_{r-2}+\ldots+s_{r-2}\nu_1+s_{r-1}\nu_0=a_r+a_0(s_1 s_{r-1}+s_2 s_{r-2}+\ldots+s_{r-1}s_1)$$
$$-\{z_1 z_{r-1}+z_2 z_{r-2}+\ldots+z_{r-1}z_1\}.$$

§ VI.

Introdotti nell'espressione (28) di ν_{r-1} i valori di φ_1, $\varphi_2, \ldots \varphi_{r-1}$ (15) e di z_1, $z_2, \ldots z_{r-1}$ (11), ed eseguite le moltiplicazioni, se denotiamo con $(-1)^{r-2}\, s^{(p,q)}_{r-2}$ la somma de' prodotti provenienti dalle combinazioni ad $r-2$ delle variabili x_1, $x_2, \ldots x_n$, escluse le x_p, x_q, cosicchè sia (4)

$$\frac{f(u)}{(u-x_p)(u-x_q)}=u^{n-2}+s_1^{(p,q)}u^{n-3}+s_2^{(p,q)}u^{n-4}+\ldots+s_{n-2}^{(p,q)},$$

confrontando i valori di $\frac{f(u)}{u-x_p}$, $\frac{f(u)}{u-x_q}$ dedotti da questa eguaglianza con quelli espressi dalla formula (5), avremo analogamente alla (7)

$$(47)\qquad \begin{aligned} s_{r-2}^{(p,q)} &= s_{r-2}^{(p)} + s_{r-3}^{(p)} x_q + s_{r-4}^{(p)} x_q^2 + \ldots + s_1^{(p)} x_q^{r-3} + x_q^{r-2} \\ &= s_{r-2}^{(q)} + s_{r-3}^{(q)} x_p + s_{r-4}^{(q)} x_p^2 + \ldots + s_1^{(q)} x_p^{r-3} + x_p^{r-2}, \end{aligned}$$

e conseguentemente

$$(48)\qquad \begin{aligned} n_{r-1} = \beta_r + a_0 s_r &- (x_1^{r-2} + s_1^{(1)} x_1^{r-3} + s_2^{(1)} x_1^{r-4} + \ldots + s_{r-2}^{(1)}) \frac{X_1}{\overline{f'(x_1)}^2} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- (x_n^{r-2} + s_1^{(n)} x_n^{r-3} + s_2^{(n)} x_n^{r-4} + \ldots + s_{r-2}^{(n)}) \frac{X_n}{\overline{f'(x_n)}^2} \\ &- \frac{2 s_{r-2}^{(1,2)} \sqrt{X_1 X_2}}{f'(x_1) f'(x_2)} - \ldots\ldots - \frac{2 s_{r-2}^{(1,n)} \sqrt{X_1 X_n}}{f'(x_1) f'(x_n)} \\ &- \frac{2 s_{r-2}^{(2,3)} \sqrt{X_2 X_3}}{f'(x_2) f'(x_3)} \ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{2 s_{r-2}^{(n-1,n)} \sqrt{X_{n-1} X_n}}{f'(x_{n-1}) f'(x_n)}. \end{aligned}$$

Sostituendo a β_r il suo valore (44) (38), ed eseguendo le riduzioni a' comuni divisori $\overline{f'(x_1)}^2$, $\overline{f'(x_2)}^2$, ... $\overline{f'(x_n)}^2$, attesa la prima delle due espressioni (8) di $f'(x_m)$, si trova coll'adottare il segno Σ nel senso della formula (2)

$$(49)\qquad \begin{aligned} n_{r-1} = a_0 s_r &+ \sum_{m=1}^{m=n+1} \left(\frac{a_r x_m^{n-1} + a_{r-1} x_m^{n} + \ldots + a_0 x_m^{n+r-1}}{\overline{f'(x_m)}^2} \right) (s_{r-1}^{(m)} x_m^{n-r} + \ldots + s_{n-2}^{(m)} x_m + s_{n-1}^{(m)}) \\ &- \sum_{m=1}^{m=n+1} \left(\frac{a_{r+1} x_m^{2n-r-1} + a_{r+2} x_m^{2n-r-2} + \ldots + a_{2n}}{\overline{f'(x_m)}^2} \right) (x_m^{r-2} + s_1^{(m)} x_m^{r-3} + \ldots + s_{r-2}^{(m)}) \\ &- \frac{2 s_{r-2}^{(1,2)} \sqrt{X_1 X_2}}{f'(x_1) f'(x_2)} - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{2 s_{r-2}^{(n-1,n)} \sqrt{X_{n-1} X_n}}{f'(x_{n-1}) f'(x_n)}. \end{aligned}$$

Le formule (48) (49) si ponno ridurre ad un aspetto più semplice pe' valori di r che eccedono la metà del numero $n+1$. Poniamo infatti

$$(50)\qquad \beta_r - \frac{X_1}{x_1^{n-r+1} f'(x_1)} - \frac{X_2}{x_2^{n-r+1} f'(x_2)} - \ldots - \frac{X_n}{x_n^{n-r+1} f'(x_n)} = \delta_r\,,$$

donde risulta colla sostituzione del valore (44) (38) di β_r, attese le identità (40),

$$(51)\qquad \delta_r = -\frac{a_{r+n}\, x_1^{n-r} + a_{r+n+1}\, x_1^{n-r-1} + \ldots + a_{2n-1}\, x_1 + a_{2n}}{x_1^{n-r+1} f'(x_1)}$$

$$- \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{a_{r+n}\, x_n^{n-r} + a_{r+n+1}\, x_n^{n-r-1} + \ldots + a_{2n-1}\, x_n + a_{2n}}{x_n^{n-r+1} f'(x_n)}\,,$$

ovvero a cagione delle identità (43)

$$(52)\qquad \delta_n = \frac{a_{2n}}{s_n}$$

$$\delta_{n-1} = \frac{a_{2n-1}}{s_n} - \frac{a_{2n}}{s_n}\frac{s_{n-1}}{s_n}$$

$$\delta_{n-2} = \frac{a_{2n-2}}{s_n} - \frac{a_{2n-1}}{s_n}\frac{s_{n-1}}{s_n} + \frac{a_{2n}}{s_n}\left(\frac{s_{n-1}}{s_n}\frac{s_{n-1}}{s_n} - \frac{s_{n-2}}{s_n}\right),$$

ecc.

ed avremo con facili riduzioni, mercè la seguente equazione identica che si ritrae dalla (8)

$$x_m^{r-2} + s_1^{(m)} x_m^{r-3} + \ldots + s_{r-2}^{(m)} = \frac{f(x_m) - \left\{ s_{r-1}^{(m)} x_m^{n-r} + s_r^{(m)} x_m^{n-r-1} + \ldots + s_{n-1}^{(m)} \right\}}{x_m^{n-r+1}}\,,$$

primieramente

$$(53)\qquad \nu_{r-1} = \delta_r + a_0 s_r + (s_{r-1}^{(1)} x_1^{n-r} + s_r^{(1)} x_1^{n-r-1} + \ldots + s_{n-1}^{(1)}) \frac{X_1}{x_1^{n-r+1} \overline{f'(x_1)}^2}$$

$$+ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ (s_{r-1}^{(n)} x_n^{n-r} + s_r^{(n)} x_n^{n-r-1} + \ldots + s_{n-1}^{(n)}) \frac{X_n}{x_n^{n-r+1} \overline{f'(x_n)}^2}$$

$$- \frac{2 s_{r-2}^{(1,2)} \sqrt{X_1 X_2}}{f'(x_1) f'(x_2)} - \quad \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \quad - \frac{2 s_{r-2}^{(n-1,n)} \sqrt{X_{n-1} X_n}}{f'(x_{n-1}) f'(x_n)}$$

poscia colla introduzione del valore (51) di δ_r,

$$(54)\qquad \nu_{r-1} = a_0 s_r + \sum_{m=1}^{m=n+1} \left(\frac{a_0 x_m^{n+r-1} + a_1 x_m^{n+r-2} + \ldots + a_{r+n-1}}{\overline{f'(x_m)}^2} \right) \left\{ s_{r-1}^{(m)} x_m^{n-r} + s_{r-2}^{(m)} x_m^{n-r-1} + \ldots + s_{n-1}^{(m)} \right\}$$

$$- \sum_{m=1}^{m=n+1} \left(\frac{a_{r+n} x_m^{n-r} + a_{r+n+1} x_m^{n-r-1} + \ldots + a_{2n}}{\overline{f'(x_m)}^2} \right) \left\{ x_m^{r-2} + s_1^{(m)} x_m^{r-3} + \ldots + s_{r-2}^{(m)} \right\}$$

$$- \frac{2 s_{r-2}^{(1,2)} \sqrt{X_1 X_2}}{f'(x_1) f'(x_2)} - \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad - \frac{2 s_{r-2}^{(n-1\, n)} \sqrt{X_{n-1} X_n}}{f'(x_{n-1}) f'(x_n)} .$$

Queste due espressioni (53) (54) si ponno mettere sotto un aspetto analogo alla formula (28), dal cui sviluppo si sono dedotte l'altre espressioni (48) (49). Infatti posta $u = x_q$ nell' equazione (5), e scritto p in luogo dell' indice m, se ne ricava

$$x_q^{r-2} + s_1^{(p)} x_q^{r-3} + \ldots + s_{r-3}^{(p)} x_q + s_{r-2}^{(p)} = - \left\{ \frac{s_{r-1}^{(p)}}{x_q} + \frac{s_r^{(p)}}{x_q^2} + \ldots + \frac{s_{n-1}^{(p)}}{x_q^{n-r+1}} \right\}.$$

e perciò risulta dalla (47)

$$\frac{s_{r-1}^{(p)}}{x_q} + \frac{s_r^{(p)}}{x_q^2} + \frac{s_{r+1}^{(p)}}{x_q^3} + \ldots + \frac{s_{n-1}^{(p)}}{x_q^{n-r+1}} = - s_{r-2}^{(p\, q)} .$$

e similmente

$$\frac{s_{r-1}^{(q)}}{x_p} + \frac{s_r^{(q)}}{x_p^2} + \frac{s_{r+1}^{(q)}}{x_p^3} + \dots + \frac{s_{n-1}^{(q)}}{x_p^{n-r+1}} = - s_{r-2}^{(p\cdot q)} .$$

Pertanto se attribuiamo valori negativi all'indice p della funzione v_p (15) troviamo

$$(55) \qquad \nu_{r-1} = \delta_r + a_0 s_r + v_0 z_r + v_{-1} z_{r+1} + v_{-2} z_{r+2} + \dots + v_{-n+r} z_n .$$

attesochè introdotti in questa formula i valori (15) di v_0, v_{-1}, v_{-2}, ... v_{-n+r}, e quelli (11) di z_r, z_{r+1}, ... z_n si ricade nella (55).

Abbiamo già notato (§ IV) che ad $r = 1$ corrisponde $\nu_0 = a_1$. Se dunque poniamo $r = 1$ nella (55) ne sorge l'equazione identica

$$\delta_1 + a_0 s_1 + v_0 z_1 + v_{-1} z_2 + v_{-2} z_3 + \dots + v_{-n+1} z_n = a_1 ,$$

e in generale, sottraendo l'espressione (28) di ν_{r-1} dalla (55), si ottiene l'identità

$$(56) \qquad v_{r-1} z_1 + v_{r-2} z_2 + \dots + v_1 z_{r-1} + v_0 z_r + \dots + v_{-n+r} z_n + \delta_r - \beta_r = 0 ,$$

in cui r può assumere tutti i valori $1, 2, 3, \dots n$.

§ VII.

La formula (55) pe' valori più elevati di r diviene semplice quanto la (28) pe' più piccoli valori dell'indice stesso. Così dalla (28) ovvero dalla (48) si ritrae per $r = 2$

$$\left\{\frac{\sqrt{X_1}}{f'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{f'(x_2)} + \dots + \frac{\sqrt{X_n}}{f'(x_n)}\right\}^2 - a_1 (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - a_0 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = \text{cost.},$$

ch'è l'integrale già trovato dal sig. Richelot nella Memoria sovraccitata sulla integrazione d'un notabile sistema di equazioni differenziali (*Giornale di Matematiche del sig. Crelle di Berlino* T. XXIII p. 334).

All'incontro per $r = n$ abbiamo dalla (55), oppure dalla (53)

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n \left\{\left(\frac{\sqrt{X_1}}{x_1 f'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{x_2 f'(x_2)} + \dots + \frac{\sqrt{X_n}}{x_n f'(x_n)}\right)^2 - a_0\right\} - \frac{a_{2n}}{x_1 x_2 \dots x_n} = \text{Cost.}$$

Sostituendo nella (28) o nello sviluppo di essa (48) (49) in luogo di r i numeri 2, 3, 4, ecc. che non eccedono $\frac{n+1}{2}$, ed eseguendo le rimanenti sostituzioni nella (33) o nel suo sviluppo (33) (34), avremo gli integrali algebrici delle equazioni (1) più brevemente espressi che non coll'uso esclusivo d'una sola di quelle formule.

Osserveremo col sig. Richelot, che il sistema delle date equazioni (1) rimane intatto, e solo si inverte l'ordine in cui sono scritte se ad x_1, x_2, ... x_n, a_0, a_1, a_2, ... a_{2n} si sostituiscano rispettivamente $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, ... $\frac{1}{x_n}$, a_{2n}, a_{2n-1}, ... a_1, a_0. Pertanto le equazioni (37) non cessano di esprimere gli integrali algebrici delle (1), se vi si fanno le relative sostituzioni or ora accennate. Per simili sostituzioni troviamo cangiarsi (8) (13) (38) (44) (31)

$$s_r, \quad s_{r-1}^{(m)}, \quad f'(x_m), \quad \beta_r, \quad v_p$$

nelle corrispondenti funzioni

$$\frac{s_{n-r}}{s_n}, \quad \frac{s_{n-r}^{(m)}}{s_{n-1}^{(m)}} = -\frac{x_m\, s_{n-r}^{(m)}}{s_n}, \quad \frac{-f'(x_m)}{s_n\, x_m^{n-2}}, \quad s_n\,\delta_{n-r}, \quad -s_n\, v_{-p}\,.$$

e poichè in conformità all'ultima delle (6) si rileva essere

$$\frac{s_{n-r}^{(m)}}{x_m} = s_{n-r-1}^{(m)} + \frac{s_{n-r}}{x_m}.$$

ne viene pure (11) il cangiamento di z_r in $z_{n-r} + s_{n-r}\, v_0$.

Altronde posta $u = x_m$ nella (4), e divisa l'identità che ne risulta per x_m^{r+1}, abbiamo

$$x_m^{n-r-1} + s_1\, x_m^{n-r-2} + \ldots + s_{n-r-1} + \frac{s_{n-r}}{x_m} + \ldots + \frac{s_{n-1}}{x_m^r} + \frac{s_n}{x_m^{r+1}} = 0\,.$$

e quindi attribuendo all'indice m i valori 1, 2, 3, ... n ricaviamo altrettante eguaglianze, che rispettivamente moltiplicate per $\frac{\sqrt{X_1}}{f'(x_1)}$, $\frac{\sqrt{X_2}}{f'(x_2)}$, ... $\frac{\sqrt{X_n}}{f'(x_n)}$, e sommate insieme, ci esibiscono l'equazione

$$v_{n-r} + s_1 v_{n-r-1} + \ldots + s_{n-r-1} v_1 + s_{n-r} v_0 + s_{n-r+1} v_{-1} + \ldots + s_n v_{-r} = 0\,,$$

ossia per la (14)

$$(57) \qquad z_{n-r} + s_{n-r} v_0 + s_{n-r+1} v_{-1} + s_{n-r+2} v_{-2} + \ldots + s_n v_{-r} = 0\,;$$

Conseguentemente la funzione ϑ_{r-1} (28) per le sovraccennate permutazioni si converte nella funzione

$$(58) \quad \theta_{r-1} = a_{2n} \frac{s_{n-r}}{s_n} + s_n \left\{ \delta_{n-r} + v_{-1} z_{n-r+1} + \ldots + v_{-r+1} z_{n-1} + v_{-r} z_n - v_0 (z_{n-r} + s_{n-r} v_0) \right\},$$

e gli integrali completi algebrici (57) delle equazioni (1) divengono

$$(59) \qquad \theta_1 = c^{(1)}, \quad \theta_2 = c^{(2)}, \quad \theta_3 = c^{(3)}, \ldots \quad \theta_{n-1} = c^{(n-1)},$$

essendo $\theta_0 = a_{2n-1}$ una determinata costante in corrispondenza ad $\vartheta_0 = a_1$, e denotandosi con $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, $c^{(3)}$ ecc. nuove costanti arbitrarie. Per $r = 2$ si avrebbe dalla (58), attese le (57) (52),

$$s_n^2 \left\{ \frac{\sqrt{X_1}}{x_1^2 f'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{x_2^2 f'(x_2)} + \ldots + \frac{\sqrt{X_n}}{x_n^2 f'(x_n)} \right\}^2 + a_{2n-1} \frac{s_{n-1}}{s_n} - a_{2n} \left(\frac{s_{n-1}}{s_n} \right)^2 = \text{Cost.}$$

Questa formula venne esibita dal Richelot come espressione d'un altro integrale algebrico delle equazioni (1).

Sottraendo da' due membri della (58) i rispettivi membri moltiplicati per s_n dell' eguaglianza che proviene dalla (55), ove si scriva $n - r$ in luogo di r, otterremo

$$(60) \qquad \theta_{r-1} = a_{2n} \frac{s_{n-r}}{s_n} + s_n (\vartheta_{n-r-1} - a_0 s_{n-r} - 2 v_0 z_{n-r} - s_{n-r} v_0^2)\,.$$

Se in questa formula sostituiamo ad ϑ_{n-r-1} la sua espressione desunta dalla (28), postovi $n - r$ in luogo di r, troviamo la formula

$$(61) \quad \theta_{r-1} = a_{2n} \frac{s_{n-r}}{s_n} + s_n \left\{ \beta_{n-r} - v_0 z_{n-r} - v_1 z_{n-r-1} - \ldots - v_{n-r-1} z_1 - v_0 (z_{n-r} + s_{n-r} v_0) \right\},$$

in cui si converte la (55) pel relativo cangiamento delle quantità x_1, $x_2, \ldots x_n$, a_0, $a_1, \ldots a_{2n}$ nelle $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}, \ldots \frac{1}{x_n}$; a_{2n}, $a_{2n-1}, \ldots a_0$. Que-

sta sostituzione eseguita nelle formule (48) (49), ovvero nelle (53) (54), ci darebbe i corrispondenti sviluppi delle (58) (61).

§ VIII.

Del resto l'analisi che ci ha guidato alle formule (57) ci somministra altre nuove espressioni degli integrali algebrici delle equazioni (1).

Eliminando $\mathrm{d}\,t$ fra l'equazione (12) e quella che proviene dal sommare insieme le (27) (28) cioè

$$(62)\qquad 2\,\frac{\mathrm{d}\,z_r}{\mathrm{d}\,t} = \nu_{r-1} - 2\,a_0\,s_r\,,$$

si ottiene

$$2\,z_r\,\mathrm{d}\,z_r + \nu_{r-1}\,\mathrm{d}\,s_r - 2\,a_0\,s_r\,\mathrm{d}\,s_r = 0\,,$$

e poichè ν_{r-1} è quantità costante (29), avremo dall'immediata integrazione della presente eguaglianza

$$(63)\qquad z_r^2 + \nu_{r-1}\,s_r - a_0\,s_r^2 = A_r\,,$$

denotandosi con A_r una costante arbitraria. Pe' valori 1, 2, 3, ... $n-1$ di r si avranno dalla (63) gli $n-1$ integrali algebrici delle equazioni (1). Per $r=1$ si ricadrebbe nell'integrale trovato dal sig. Richelot che abbiamo dianzi (§ VII) dedotto dalla (28), postovi $r=2$. Si prescinde dalla sostituzione del numero n in luogo di r nella (63) perchè avendosi (57) $z_n = -s_n\,\varsigma_0$, e (33) (32)

$$\nu_{n-1} = \delta_n + a_0\,s_n + \varsigma_0\,z_n = \frac{a_{2n}}{s_n} + a_0\,s_n - s_n\,\varsigma_0^2\,,$$

è palese che dal porre $r=n$ nella (63) risulta l'equazione identica

$$z_n^2 + \nu_{n-1}\,s_n - a_0\,s_n^2 = a_{2n}\,.$$

Se nella (63) surroghiamo $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, ... $\frac{1}{x_n}$, a_{2n}, a_{2n-1} .... a_0 ad x_1,

$x_1, \dots x_n, a_0, a_1, \dots a_{2n}$, ne viene dopo una facile riduzione, pel conseguente cangiamento di z_r in $z_{n-r} + s_{n-r} v_0$ (§ VII) e di ν_{r-1} in θ_{r-1} (60),

$$z^2_{n-r} + \nu_{n-r-1} s_{n-r} - a_0 s^2_{n-r} = \text{cost.},$$

cioè la stessa formula (63), mutato l'indice r in $n-r$.

Possiamo ancora eliminare s_r fra le eguaglianze (12) (62), cioè differenziare la (62), e porvi il valore di $d s_r$ esibito dalla (12). Avremo in simil guisa

$$(64) \qquad d\frac{d z_r}{d t} = a_0 z_r \, d t,$$

e posto $r = 1$,

$$d\frac{d z_1}{d t} = a_0 z_1 \, d t.$$

Sottraendo la (64) moltiplicata per z_1 dalla susseguente eguaglianza moltiplicata per z_r, si ottiene

$$z_r \, d\frac{d z_1}{d t} - z_1 \, d\frac{d z_r}{d t} = 0,$$

e quindi integrando, e rappresentando con E_{r-1} la costante arbitraria, troviamo

$$(65) \qquad z_r \frac{d z_1}{d t} - z_1 \frac{d z_r}{d t} = E_{r-1}.$$

Se invece sommiamo insieme la (64) e la susseguente equazione, dopo di averle rispettivamente moltiplicate per $\frac{d z_1}{d t}$, $\frac{d z_r}{d t}$, ne risulta una eguaglianza dalla cui integrazione, denotando la costante arbitraria con G_{r-1}, si deduce

$$(66) \qquad \frac{d z_1}{d t}\frac{d z_r}{d t} - a_0 z_1 z_r = G_{r-1}.$$

Introdotti nelle formule (65) (66) le espressioni (62) di $\frac{d z_r}{d t}$, $\frac{d z_1}{d t}$, ed

attribuiti all' indice r i successivi valori $2, 3, \ldots n$, si ottengono due nuovi sistemi d' integrali algebrici delle date equazioni (1).

Nell' applicare a' casi particolari le varie formule (28) (33) (38) (61) (63) (65) (66) esprimenti gl' integrali completi algebrici delle equazioni (1), si potrà desumere i richiesti integrali in parte dall' uno di que' sistemi, e in parte dagli altri, purchè si riconosca che le espressioni di siffatti integrali sieno affatto distinte fra loro, di maniera che sottraendo l' una dall' altra non ne venga una determinata relazione fra le costanti arbitrarie. Così il sig. Richelot, dopo di avere espresso uno degli integrali algebrici delle equazioni (1) colla formula risultante dal porre nella (28) $r=2$ (§ VII), offre un altro integrale nell' equazione che proviene dal porre $r=2$ nella (38) (*Nota I*).

Sostituito nella (12) a z_r il valore esibito dalla (65) abbiamo

$$(67) \qquad \mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{d}s_r}{\sqrt{\{A_r - \nu_{r-1}\, s_r + a_0 s_r^2\}}}$$

Ora integrando questa formula, indi restituendo in luogo di A_r l' equivalente espressione (65), troviamo

1° nel caso di $a_0 > 0$

$$(68) \qquad t = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \log.\, H_r \{\tfrac{1}{2}\nu_{r-1} - a_0 s_r + z_r \sqrt{a_0}\}.$$

2° nel caso di $a_0 < 0$

$$(69) \qquad t = H_r + \frac{1}{\sqrt{-a_0}} \text{ arc tang. } \frac{z_r\sqrt{-a_0}}{\tfrac{1}{2}\nu_{r-1} - a_0 s_r}.$$

3° nel caso di $a_0 = 0$

$$(70) \qquad t = \frac{2 z_r}{\nu_{r-1}} + H_r.$$

denotandosi con H_r la costante arbitraria.

Le formule (68) (69) 70), secondo i tre casi di a_0 positivo, negativo o nullo, esprimono l' integrale dell' equazione (5), che si suppone aver luogo insieme alle equazioni (1). Si potrà attribuire ad r uno

qualunque de' valori 1, 2, 3, ... n. Assumendo il più semplice valore $r=1$, si avrà per integrale dell' equazione (3), secondochè sia $a_0>0$, $a_0<0$, $a_0=0$,

$$(71)\qquad t=\frac{1}{\sqrt{a_0}}\log.\, H_1\left\{\tfrac{1}{2}a_1-a_0 s_1+z_1\sqrt{a_0}\right\},$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{-a_0}}\text{ arc tang. }\frac{z_1\sqrt{-a_0}}{\frac{1}{2}a_1-a_0 s_1}+H_1,$$

$$t=\frac{2z_1}{a_1}+H_1.$$

Se oltre di $a_0=0$ fosse $a_1=0$, converrà porre nella (70) un altro valore di r diverso da 1.

Sottraendo la 1ª delle (71) dalla (68), e scrivendo K_{r-1} in luogo della costante arbitraria $\dfrac{H_1}{H_r}$, si avrebbe

$$(72)\qquad \frac{\frac{1}{2}\eta_{r-1}-a_0 s_r+z_r\sqrt{a_0}}{\frac{1}{2}a_1\ \ -a_0 s_1+z_1\sqrt{a_0}}=K_{r-1}.$$

Da questa formula, col sostituire ad r i numeri 2, 3, ... n, si può dedurre una nuova serie di integrali algebrici delle equazioni (1).

§ IX.

Cerchiamo infine i fattori per cui moltiplicate le equazioni (1) offrono per loro somma una differenziale esatta $d\varphi=0$, supponendo di conoscere uno qualunque $\varphi=\text{cost.}$ degli integrali completi delle equazioni medesime. Poichè la somma delle equazioni (1) rispettivamente moltiplicate pe' fattori richiesti, che indicheremo con F_0, F_1, F_2, ... F_{n-1}, deve equivalere a $d\varphi$; avremo dal confronto de' coefficienti delle differenziali dx_1, dx_2, ... dx_n, dall'una e dall'altra parte, le eguaglianze

$$
\begin{aligned}
(73)\qquad & F_0 + x_1 F_1 + x_1^2 F_2 + \ldots + x_1^{n-2} F_{n-2} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x_1}\right)\sqrt{X_1}\,, \\
& F_0 + x_2 F_1 + x_2^2 F_2 + \ldots + x_2^{n-2} F_{n-2} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x_2}\right)\sqrt{X_2}\,, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& F_0 + x_n F_1 + x_n^2 F_2 + \ldots + x_n^{n-2} F_{n-2} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x_n}\right)\sqrt{X_n}\,.
\end{aligned}
$$

le quali essendo in numero n, e non involgendo che $n-1$ incognite, danno origine ad una equazione di condizione, che si può determinare nel modo seguente. Supponiamo che fra le n quantità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ esistano le $n-1$ relazioni

$$
\begin{aligned}
(74)\qquad & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = 0\,, \\
& x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + \ldots + x_n \lambda_n = 0\,, \\
& x_1^2 \lambda_1 + x_2^2 \lambda_2 + \ldots + x_n^2 \lambda_n = 0\,, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& x_1^{n-2} \lambda_1 + x_2^{n-2} \lambda_2 + \ldots + x_n^{n-2} \lambda_n = 0\,,
\end{aligned}
$$

e ponendo inoltre

$$x_1^{n-1} \lambda_1 + x_2^{n-1} \lambda_2 + \ldots + x_n^{n-1} \lambda_n = L\,,$$

si avrà dal sommare quest' ultima eguaglianza colle (74) rispettivamente moltiplicate per $s_{n-1}^{(m)}, s_{n-2}^{(m)}, \ldots s_1^{(m)}$, (5) (8) (§ I)

$$f'(x_m)\lambda_m = L\,,$$

cioè

$$\lambda_1 = \frac{L}{f'(x_1)}\,,\quad \lambda_2 = \frac{L}{f'(x_2)}\,;\ldots\quad \lambda_n = \frac{L}{f'(x_n)}\,.$$

Conseguentemente, presa la somma delle (75) moltiplicate per le quantità rispettive $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, spariranno (74) tutte le incognite F_0, F_1, $F_2, \ldots F_{n-2}$, e resterà l'equazione di condizione

$$(75)\qquad \frac{\sqrt{X_1}}{f'(x_1)}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_1}\right)+\frac{\sqrt{X_2}}{f'(x_2)}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_2}\right)+\ldots+\frac{\sqrt{X_n}}{f'(x_n)}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_n}\right)=0\,,$$

la quale trovasi evidentemente soddisfatta, poichè risulta dall' introdurre nell' equazione

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_1}\right)\mathrm{d}x_1+\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_2}\right)\mathrm{d}x_2+\ldots+\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x_n}\right)\mathrm{d}x_n=0\,,$$

i valori (9) degli elementi $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, ... $\mathrm{d}x_n$. È poi chiaro per la teoria Lagrangiana delle equazioni lineari a derivate parziali di primo ordine, che all'equazione (75) soddisfa non solamente il valore $\Phi=$cost., ma in generale una funzione arbitraria delle espressioni r_1, r_2, ... r_{n-1} de' primi membri degl' integrali (37).

Ora se fra nuove quantità μ_1, μ_2, ... μ_n esistano $n-1$ relazioni simili alle (74), e solo in luogo d' una qualunque di quelle

$$x_1^r\lambda_1+x_2^r\lambda_2+\ldots+x_n^r\lambda_n=0\,,$$

abbiasi

$$x_1^r\mu_1+x_2^r\mu_2+\ldots+x_n^r\mu_n=1\,;$$

è palese che ponendo

$$x_1^{n-1}\mu_1+x_2^{n-1}\mu_2+\ldots+x_n^{n-1}\mu_n=M\,,$$

avremo dal sommare le nuove n equazioni rispettivamente moltiplicate per $s_{n-1}^{(m)}$, $s_{n-2}^{(m)}$, ... $s_{n-r-1}^{(m)}$, ... $s_1^{(m)}$, 1, (5) (8)

$$f'(x_m)\,\mu_m=s_{n-r-1}^{(m)}+M\,,$$

e quindi

$$\mu_1=\frac{s_{n-r-1}^{(1)}+M}{f'(x_1)},\quad \mu_2=\frac{s_{n-r-1}^{(2)}+M}{f'(x_2)}\ \ldots\quad \mu_n=\frac{s_{n-r-1}^{(n)}+M}{f'(x_n)}.$$

In seguito moltiplicando le (75) per le quantità rispettive μ_1, μ_2, ... μ_n, e prendendone la somma si trova che spariscono le incognite F_0,

$F_1, \ldots F_{n-2}$, ad eccezione di F_r, attese le relazioni esistenti fra μ_1, $\mu_2, \ldots \mu_n$; di più sparisce M, a cagione della (75), e risulta

$$(76) \qquad F_r = \frac{s^{(1)}_{n-r-1}\sqrt{X_1}}{f'(x_1)}\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + \frac{s^{(2)}_{n-r-1}\sqrt{X_2}}{f'(x_2)}\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right) + \ldots + \frac{s^{(n)}_{n-r-1}\sqrt{X_n}}{f'(x_n)}\left(\frac{d\varphi}{dx_n}\right).$$

Potrebbesi eliminare dalla (76) una delle derivate parziali di φ mediante l'equazione (75). Così per eliminarne $\left(\frac{d\varphi}{dx_n}\right)$ basterà introdurre nella (76) il valore di $\frac{\sqrt{X_n}}{f'(x_n)}\left(\frac{d\varphi}{dx_n}\right)$ dedotto dalla (75), e si avrà

$$(77) \qquad F_r = \frac{\{s^{(1)}_{n-r-1} - s^{(n)}_{n-r-1}\}\sqrt{X_1}}{f'(x_1)}\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + \ldots + \frac{\{s^{(n-1)}_{n-r-1} - s^{(n)}_{n-r-1}\}\sqrt{X_{n-1}}}{f'(x_{n-1})}\left(\frac{d\varphi}{dx_{n-1}}\right).$$

Attribuendo ad r nella (76), oppure nella (77), i valori 0, 1, 2, 3,... $n-2$, si ottengono gli $n-1$ fattori richiesti, ed altronde è manifesto (8) che la somma delle equazioni (1), rispettivamente moltiplicate pe' valori (76) di F_0, F_1, $F_2, \ldots F_{n-2}$, produce la differenziale esatta $d\varphi = 0$. Le espressioni di questi fattori si possono evidentemente moltiplicare per una funzione arbitraria $\chi'(\varphi)$ della quantità φ, poichè ne proviene tuttavia la differenziale esatta $\chi'(\varphi)\, d\varphi = 0$.

Se l'integrale $\varphi = \text{cost.}$ si suppone dedotto dalla integrazione immediata d'una delle equazioni (1)

$$\frac{x_1^m\, dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^m\, dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n^m\, dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0,$$

allora il valore di F_r per $r = m$ equivale all'unità, e pegli altri valori di r si annulla. Pertanto, sostituiti nella (76) alle derivate parziali di φ i corrispondenti valori, troviamo che la funzione

$$(78) \qquad \frac{s^{(1)}_{n-r-1}\, x_1^m}{f'(x_1)} + \frac{s^{(2)}_{n-r-1}\, x_2^m}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{s^{(n)}_{n-r-1}\, x_n^m}{f'(x_n)}$$

si riduce all'unità per $r = m$, e va a zero per ogni altro valore di r essendo m suscettibile de' valori 0, 1, 2, 3.... $n-2$.

Onde applicare la formula (77) ad un esempio supponiamo $n = 2$.

e determiniamo il fattore F che rende il primo membro dell'equazione

$$\frac{d x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{d x_2}{\sqrt{X_2}} = 0\,.$$

la differenziale esatta di

$$\varphi = a_1 (x_1 + x_2) + a_0 (x_1 + x_2)^2 - \left\{ \frac{\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2}}{x_1 - x_2} \right\}^2,$$

essendo $\varphi =$ cost. l'integrale algebrico dell'equazione proposta, come appare dalle formule (57) (48) (8). Avremo

$$\left(\frac{d\varphi}{d x_1}\right) = a_1 + 2\, a_0 (x_1 + x_2) - \left(\frac{\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2}}{x_1 - x_2}\right) \left\{ \frac{X_1'}{(x_1 - x_2)\sqrt{X_1}} - 2\, \frac{\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2}}{(x_1 - x_2)^2} \right\};$$

e poichè (75) si verifica l'equazione identica

$$a_1 + 2\, a_0 (x_1 + x_2) - \frac{X_1'(x_1 - x_2) - 2\, X_1}{(x_1 - x_2)^3} = \frac{X_2'(x_1 - x_2) + 2\, X_2}{(x_1 - x_2)^3};$$

troveremo agevolmente (77)

$$F = \sqrt{X_1}\left(\frac{d\varphi}{d x_1}\right) = \left\{ \frac{X_2'(x_1 - x_2) + 4\, X_2}{(x_1 - x_2)^3} \right\} \sqrt{X_1} + \left\{ \frac{X_1'(x_1 - x_2) - 4\, X_1}{(x_1 - x_2)^3} \right\} \sqrt{X_2}\,.$$

Questa formula (*Nota VI*) corrisponde a quella già proposta dall' Eulero nel T. IV delle *Istituzioni di calcolo integrale* Supplemento VIII.

PARTE II.

---

§ X.

Dalle espressioni algebriche degli integrali delle equazioni (1) risultano le relazioni fra gli argomenti di $n-1$ trascendenti Abeliane e quelli d'un maggior numero di consimili funzioni, la cui somma si può sempre ridurre all'aggregato di $n-1$ trascendenti della stessa specie. Infatti se poniamo in generale

$$(79)\qquad \int_b^{x_m} \frac{x_m^r \, \mathrm{d}\, x_m}{\sqrt{X_m}} = \Phi_r(x_m),$$

potendosi supporre $b=0$, finchè r non sia negativo, otterremo dall'immediata integrazione delle equazioni (1) n equazioni finite della forma

$$\Phi_r(x_1)+\Phi_r(x_2)+\ldots+\Phi_r(x_n)=\text{cost}$$

in cui r è suscettibile de' valori 0, 1, 2, 3, ... $n-2$. Ora assumendo $x_n=b$, e supponendo che i valori corrispondenti dell'altre variabili sieno le quantità arbitrarie $x_1=b_1$, $x_2=b_2$, ... $x_{n-1}=b_{n-1}$, ne ricaviamo a cagione (79) di $\Phi_r(b)=0$

$$\Phi_r(b_1)+\Phi_r(b_2)+\ldots+\Phi_r(b_{n-1})=\text{cost}$$

e quindi colla sottrazione di questa eguaglianza dalla antecedente si otterrà pe' valori 0, 1, 2, ... $n-2$ di r la riduzione

$$(80)\qquad \Phi_r(x_1)+\Phi_r(x_2)+\ldots+\Phi_r(x_n)=\Phi_r(b_1)+\Phi_r(b_2)+\ldots+\Phi_r(b_{n-1}).$$

Altronde se poniamo $x_n=b$, $x_1=b_1$, $x_2=b_2$, ... $x_{n-1}=b_{n-1}$ negli integrali algebrici (57) delle equazioni (1), e denotiamo con χ_1, χ_2, ...

χ_{n-1} i corrispondenti valori delle funzioni u_1, u_2, ... u_{n-1}, avremo

$$\chi_1 = c_1, \quad \chi_2 = c_2, \ldots \quad \chi_{n-1} = c_{n-1};$$

e quindi la relativa sottrazione delle equazioni (57) da quest'ultime ci esibirà le relazioni

$$(81) \qquad \chi_1 = u_1, \quad \chi_2 = u_2, \ldots \quad \chi_{n-1} = u_{n-1}$$

de' nuovi argomenti b_1, b_2, ... b_{n-1} co' dati argomenti x_1, x_2, ... x_n e coll'origine b degli integrali (79).

L'immediata integrazione dell'equazione (5) offrendoci

$$\Phi_{n-1}(x_1) + \Phi_{n-1}(x_2) + \ldots + \Phi_{n-1}(x_n) = t + \text{cost.}$$

se indichiamo con k il valore di t corrispondente ad $x_n = b$ avremo

$$\Phi_{n-1}(b_1) + \Phi_{n-1}(b_2) + \ldots + \Phi_{n-1}(b_{n-1}) = k + \text{cost.}$$

e quindi, eliminata la nuova costante arbitraria col sottrarre quest'ultima eguaglianza dalla precedente, si otterrà

$$(82) \quad \Phi_{n-1}(x_1) + \Phi_{n-1}(x_2) + \ldots + \Phi_{n-1}(x_n) = \Phi_{n-1}(b_1) + \Phi_{n-1}(b_2) + \ldots + \Phi_{n-1}(b_{n-1}) + t - k.$$

Per determinare il valore di $t - k$ poniamo nelle (71) $x_n = b$, $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$ ... $x_{n-1} = b_{n-1}$ e designando con ξ_1 ciò che diviene la funzione z_1 per queste sostituzioni, e con σ_1 il corrispondente valore di s_1, cioè ponendo per brevità

$$b_1 + b_2 + \quad + b_{n-1} + b = -\sigma_1,$$

avremo, secondo i tre casi di a_0 positivo, negativo, o nullo,

$$k = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \log. H_1 \left(\tfrac{1}{2} a_1 - a_0 \sigma_1 + \xi_1 \sqrt{a_0}\right),$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{-a_0}} \operatorname{arc\,tang} \frac{\xi_1 \sqrt{-a_0}}{\frac{1}{2} a_1 - a_0 \sigma_1} + H_1,$$

$$k = \frac{2\xi_1}{a_1} + H_1,$$

e sottraendo rispettivamente queste eguaglianze dalle (71) otterremo

$$(83)\qquad t-k=\frac{1}{\sqrt{a_0}}\log.\frac{\frac{1}{2}a_1-a_0 s_1+z_1\sqrt{a_0}}{\frac{1}{2}a_1-a_0\sigma_1+\xi_1\sqrt{a_0}},$$

$$t-k=\frac{1}{\sqrt{-a_0}}\text{arc tang.}\frac{z_1(\frac{1}{2}a_1-a_0\sigma_1)-\xi_1(\frac{1}{2}a_1-a_0 s_1)}{(\frac{1}{2}a_1-a_0\sigma_1)(\frac{1}{2}a_1-a_0 s_1)-a_0\xi_1 z_1}\sqrt{-a_0}$$

$$t-k=2\left(\frac{z_1-\xi_1}{a_1}\right).$$

Converrà dunque sostituire nella (82) a $t-k$ l'una, o l'altra, o la terza delle espressioni (83), secondo i tre casi di a_0 quantità positiva, negativa, o nulla. Se poi oltre di $a_0=0$ fosse nullo anco a_1, dall'integrazione dell'equazione $\mathrm{d}s_1=-z_1\,\mathrm{d}t$ (12) in cui z_1 è costante (63), si avrebbe

$$s_1=-z_1(t-H_1),$$

e quindi

$$t-k=\frac{\sigma_1-s_1}{z_1}.$$

§ XI.

Congiuntamente al sistema delle equazioni (1) possiamo integrare mercè le funzioni dell'algebra elementare, oltre l'equazione (3), tutte quelle de' due sistemi seguenti

$$(84)\qquad \frac{x_1^n\,\mathrm{d}x_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^n\,\mathrm{d}x_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^n\,\mathrm{d}x_n}{\sqrt{X_n}}=\mathrm{d}t_1,$$

$$\frac{x_1^{n+1}\mathrm{d}x_1}{\sqrt{X_1}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x_n^{n+1}\mathrm{d}x_n}{\sqrt{X_n}}=\mathrm{d}t_2,$$

$$\frac{x_1^{n+2}\mathrm{d}x_1}{\sqrt{X_1}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{x_n^{n+2}\mathrm{d}x_n}{\sqrt{X_n}}=\mathrm{d}t_3,$$

ecc.

$$(85)\quad \frac{\mathrm{d}\,x_1}{x_1\sqrt{X_1}}+\frac{\mathrm{d}\,x_2}{x_2\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{\mathrm{d}\,x_n}{x_n\sqrt{X_n}}=\mathrm{d}\,\tau\,.$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{x_1^2\sqrt{X_1}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\mathrm{d}\,x_n}{x_n^2\sqrt{X_n}}=\mathrm{d}\,\tau_1\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{x_1^3\sqrt{X_1}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\mathrm{d}\,x_n}{x_n^3\sqrt{X_n}}=\mathrm{d}\,\tau_2\,.$$

ecc.

Imperocchè moltiplicando per $\mathrm{d}\,t$ le identità (42) (43) si trova, a cagione delle eguaglianze (9), che i loro primi membri coincidono coi primi delle equazioni (84) (85), di maniera che quest'ultime equazioni divengono

$$(86)\quad \mathrm{d}\,t_1=-s_1\,\mathrm{d}\,t\,,$$

$$\mathrm{d}\,t_2=\ (s_1\,s_1-s_2)\,\mathrm{d}\,t\,,$$

$$\mathrm{d}\,t_3=-\left\{(s_1\,s_1-s_2)\,s_1-s_1\,s_2+s_3\right\}\mathrm{d}\,t\,,$$

ecc.

$$(87)\quad \mathrm{d}\,\tau\ =-\frac{\mathrm{d}\,t}{s_n}\,,$$

$$\mathrm{d}\,\tau_1=\ \frac{s_{n-1}}{s_n}\,\frac{\mathrm{d}\,t}{s_n}\,,$$

$$\mathrm{d}\,\tau_2=-\left\{\frac{s_{n-1}}{s_n}\,\frac{s_{n-1}}{s_n}-\frac{s_{n-2}}{s_n}\right\}\frac{\mathrm{d}\,t}{s_n}\,,$$

ecc.

Ora dall'eliminazione di z_r fra le eguaglianze (65) (68), ponendo per brevità

$$(88)\quad (a_0\,A_r-\tfrac{1}{4}\,\eta_{r-1}^2)\,H_r=K_r\,,$$

si deduce, purchè a_0 non si annulli,

$$(89)\quad s_r=\frac{a_0\,A_r-\left(\frac{1}{2}\,\eta_{r-1}-\dfrac{e^{t\sqrt{a_0}}}{H_r}\right)^2}{2\,a_0\,\dfrac{e^{t\sqrt{a_0}}}{H_r}}=\frac{1}{2\,a_0}\left\{\eta_{r-1}-\frac{e^{t\sqrt{a_0}}}{H_r}+K_r\,e^{-t\sqrt{a_0}}\right\}.$$

ed è quindi palese che gl' integrali delle formule (86) (87) si potranno esprimere mercè l'aggregato di più termini o gruppi, uno dei quali sarà affetto dalla prima potenza di t moltiplicata per una data costante, e gli altri conterranno le successive potenze intere sì positive che negative dell'esponenziale $e^{t\sqrt{a_0}}$. Se nelle espressioni di questi integrali introduciamo i valori delle costanti H_r, K_r, che sono, come apparisce dalle (68) (88) (65),

$$H_r = \frac{e^{t\sqrt{a_0}}}{z_r\sqrt{a_0} + \frac{1}{2}\nu_{r-1} - a_0 s_r}, \qquad K_r = \left\{z_r\sqrt{a_0} - \left(\tfrac{1}{2}\nu_{r-1} - a_0 s_r\right)\right\} e^{t\sqrt{a_0}};$$

si troverà che quelle espressioni più non involgono l'esponenziale $e^{t\sqrt{a}}$ e nemmeno $\sqrt{a_0}$, cosicchè esse avranno luogo qualunque sia il segno di a_0 e daranno t_1, t_2, t_3, ecc. in funzioni di primo grado della variabile t. Avremo infatti (*Nota VII*)

$$(90) \qquad t_1 = -\frac{a_1}{2a_0}t + \frac{z_1}{a_0} + \text{cost.}$$

$$t_2 = \left(\frac{3}{8}\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_0}\right)t - \left(\frac{3}{4}\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}s_1\right)\frac{z_1}{a_0} + \frac{z_2}{a_0} + \text{cost.}$$

$$t_3 = -\left(\frac{5}{16}\frac{a_1^3}{a_0^3} - \frac{3}{4}\frac{a_1 a_2}{a_0^2} + \frac{1}{2}\frac{a_3}{a_0}\right)t$$

$$+\left(\frac{5}{8}\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{a_2}{a_0} + \frac{1}{3}\frac{z_1^2}{a_0} + \frac{3}{4}\frac{a_1}{a_0}s_1\right)\frac{z_1}{a_0} - \left(\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0} + s_1\right)\frac{z_2}{a_0} + \frac{z_3}{a_0} + \text{cost.}$$

ecc.

Nel caso di $a_0 = 0$ si avrebbe dalle formule (65) (70)

$$(91) \qquad s_r = \frac{A_r}{\nu_{r-1}} - \frac{1}{4}\nu_{r-1}(t - H_r)^2,$$

e poichè dall' integrazione per parti ricavasi

$$\int (t-H_1)^2(t-H_2)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(t-H_1)^3(t-H_2)^2 - \frac{2}{3}\int (t-H_1)^3(t-H_2)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}(t-H_1)^3(t-H_2)^2 - \frac{1}{2\,.\,3}(t-H_1)^4(t-H_2) + \frac{1}{2.3.5}(t-H_1)^5 + \text{cost.}$$

otterremo dall' integrare le (86), e dall' introdurre ne' loro integrali i valori di H_1, H_2, H_3, ecc. desunti dalla (70),

$$(92)\qquad t_1 = -\frac{A_1}{a_1}t + \frac{2}{3}\frac{z_1^3}{a_1^2} + \text{cost.},$$

$$t_2 = \left(\frac{A_1^2}{a_1^2} - \frac{A_2}{n_1}\right)t - \frac{4}{3}\frac{A_1 z_1^3}{a_1^3} + \frac{2}{5}\frac{z_1^5}{a_1^3} + \frac{2}{3}\frac{z_2^3}{n_1^2} + \text{cost.},$$

$$t_3 = -\left(\frac{A_1^3}{a_1^3} - 2\frac{A_1 A_2}{a_1 n_1} + \frac{A_3}{n_2}\right)t + \left(2\frac{A_1^2}{a_1^2} - \frac{4}{3}\frac{A_2}{n_1}\right)\frac{z_1^3}{a_1^2} - \left(\frac{6}{5}A_1 - \frac{2}{15}n_1\right)\frac{z_1^5}{a_1^4}$$

$$+ \frac{2}{7}\frac{z_1^7}{a_1^4} - \frac{4}{3}\frac{A_1 z_2^3}{n_1^2} + \frac{4}{3}\frac{z_1^3 z_2^2}{a_1^2 n_1} - \frac{2}{3}\frac{z_1^4 z_2}{a_1^3} + \frac{2}{3}\frac{z_3^3}{\nu_2^2} + \text{cost.},$$

ecc.

Se con a_0 fosse nullo anco a_1, non si potrebbe dedurre s_1 dalla (91), a cagione di $n_0 = a_1 = 0$. Ma allora, essendo (65) z_1 costante, si ricava dall' integrazione dell'eguaglianza $\mathrm{d}\, s_1 = -z_1 \,\mathrm{d}\, t$ (12)

$$s_1 = -z_1(t - H_1),$$

e poichè dall' integrazione per parti risulta

$$\int (t-H_1)(t-H_2)^2 \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{3}(t-H_2)^3(t-H_1) - \frac{1}{3}\int (t-H_2)^3 \,\mathrm{d}\, t$$

$$= \frac{1}{3}(t-H_2)^3(t-H_1) - \frac{(t-H_2)^4}{3 \cdot 4} + \text{cost}$$

si avrà

$$(93)\qquad t_1 = \frac{s_1^2}{2 z_1} + \text{cost}$$

$$t_2 = -\frac{A_2}{n_1}t - \frac{s_1^3}{3 z_1} + \frac{2}{3}\frac{z_2^3}{n_1^2} + \text{cost.}$$

$$t_3 = -\frac{A_3}{n_2}t + \frac{s_1^4}{4 z_1} - \frac{A_2 s_1^2}{n_1 z_1} - \frac{4}{3}\frac{z_2^3 s_1}{n_1^2} - \frac{2}{3}\frac{z_1 z_2^4}{n_1^3} + \frac{2}{3}\frac{z_3^3}{\nu_2^2} + \text{cost.}$$

ecc.

Possiamo pertanto in ogni caso ridurre i valori di t_1, t_2, t_3, ecc. all'aspetto seguente

$$(94)\qquad t_1 = C_1 t + Z_1 + \text{cost.},\quad t_2 = C_2 t + Z_2 + \text{cost.},\quad t_3 = C_3 t + Z_3 + \text{cost.},\quad \text{ecc.}$$

intendendo di denotare nelle (90), ovvero per $a_0 = 0$ nelle (91), o per $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ nelle (92), con C_1, C_2, ecc. i fattori costanti di t, e con Z_1, Z_2, ecc. i gruppi degli altri termini. Se adesso indichiamo con k_1, k_2, ecc. i valori di t_1, t_2, ecc. corrispondenti ad $x_n = b$, e supponiamo che per $x_n = b$, $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, ... $x_{n-1} = b_{n-1}$ le funzioni Z_1, Z_2, ecc. assumano i rispettivi valori Ξ_1, Ξ_2, ecc. avremo

$$(95)\qquad t_1 - k_1 = C_1(t-k) + Z_1 - \Xi_1,\quad t_2 - k_2 = C_2(t-k) + Z_2 - \Xi_2\quad \text{ecc.}$$

e poichè dall' immediata integrazione di qualsivoglia delle equazioni (84) si ottiene (79)

$$\Phi_{n+p-1}(x_1) + \Phi_{n+p-1}(x_2) + \ldots + \Phi_{n+p-1}(x_n) = t_p + \text{cost}$$

essendo p qualunque numero intero e positivo, si avrà per $x_n = b$

$$\Phi_{n+p-1}(b_1) + \Phi_{n+p-1}(b_2) + \ldots + \Phi_{n+p-1}(b_{n-1}) = k_p + \text{cost}\ ,$$

e conseguentemente

$$(96)\quad \Phi_{n+p-1}(x_1) + \Phi_{n+p-2}(x_2) + \ldots + \Phi_{n+p-1}(x_n) = \Phi_{n+p-1}(b_1) + \ldots + \Phi_{n+p-1}(b_{n-1}) + t_p - k_p$$

Il valore di $t_p - k_p$ verrà offerto dalle formule (95), e quello di $t - k$ dalle (85). A dir vero le formule (94), e quindi altresì le (95), vanno sempre più complicandosi al crescere dell' indice p; ma vedremo fra poco (§ XIII) che non occorre di protrarre il sistema delle equazioni (84) oltre la $(n-1)$ esima, attesochè, chiamato q il grado non superiore a $2n$ della funzione X sottoposta (79) al segno radicale, la trascendente $\Phi_r(x)$, per cui sia $r > q - 2$, si può far dipendere dalle sole $q - 1$ trascendenti $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ... $\Phi_{q-2}(x)$.

§ XII.

Gli integrali delle equazioni (85) si possono immediatamente desumere da quelli delle equazioni (5) (84) coll'osservare che se alle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ si sostituiscano le loro reciproche $\frac{1}{x_1}, \dots \frac{1}{x_n}$, e si permuti ciascuna a_p delle quantità $a_1, a_2, \dots a_{2n}$ colla corrispondente a_{2n-p}, i primi membri delle (5) (84) si convertono in quelli delle (85) presi col segno contrario, e perciò t, t_1, t_2, ecc. si mutano rispettivamente in $-\tau, -\tau_1, -\tau_2$, ecc. Conseguentemente se nelle formule (68) (69) (70) poniamo $r=n$, ed eseguiamo le sostituzioni testè indicate, surrogando ad H_n una nuova costante arbitraria C, avremo, per le osservazioni del § VII., ed attese le eguaglianze

$$v_0 = -\frac{z_n}{s_n} \text{ (57), e } \theta_{n-1} = \frac{a_{2n}}{s_n} + a_0 s_n - \frac{z_n^2}{s_n} = \nu_{n-1} \text{ (61) (65)}$$

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}} \log. C\left(\tfrac{1}{2}\nu_{n-1} - \frac{a_{2n}}{s_n} - \frac{z_n}{s_n}\sqrt{a_{2n}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}} \log. C\left(a_0 s_n - \frac{1}{s_n}(z_n + \sqrt{a_{2n}})^2\right), \tag{97}$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{-a_{2n}}} \text{arc tang} \frac{z_n\sqrt{-a_{2n}}}{\tfrac{1}{2}\nu_{n-1} s_n - a_{2n}} - C = \frac{1}{\sqrt{-a_{2n}}} \text{arc tang.} \frac{2 z_n \sqrt{-a_{2n}}}{a_0 s_n^2 - z_n^2 - a_{2n}} - C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a_{2n}}} \text{arc sen.} \frac{z_n\sqrt{-a_{2n}}}{s_n\sqrt{(\tfrac{1}{4}\nu_{n-1}^2 - a_0 a_{2n})}} - C,$$

$$\tau = \frac{2 z_n}{\nu_{n-1} s_n} - C = \frac{2}{s_n\sqrt{a_0} - z_n} - \frac{2\sqrt{a_0}}{\nu_{n-1}} - C = \frac{2}{s_n\sqrt{a_0} - z_n} + \text{cost.}$$

Queste tre espressioni di τ spettano a' tre casi diversi di a_{2n} positivo, negativo o nullo. Potrebbesi altresì presentare la prima di dette formule sotto l'aspetto

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}} \log. C\left(\tfrac{1}{2}\nu_{n-1} - \frac{a_{2n}}{s_n} + \frac{z_n}{s_n}\sqrt{a_{2n}}\right);$$

imperocchè, a cagione dell'eguaglianza (65), ove si ponga $r=n$, risulta

$$\left(\tfrac{1}{2}\eta_{n-1}-\frac{a_{2n}}{s_n}+\frac{z_n}{s_n}\sqrt{a_{2n}}\right)\left(\tfrac{1}{2}\eta_{n-1}-\frac{a_{2n}}{s_n}-\frac{z_n}{s_n}\sqrt{a_{2n}}\right)=\tfrac{1}{4}\eta_{n-1}^2-a_0 a_{2n}.$$

Supponendo inoltre che, per le sostituzioni dianzi accennate, i moltiplicatori costanti C_1, C_2, C_3, ecc. nelle formule (95) divengano $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, ecc., e le funzioni Z_1, Z_2, ecc. si mutino in $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ecc.. otterremo

$$(98)\qquad \tau_1=C^{(1)}\tau+Z^{(1)}+\text{cost.}\quad \tau_2=C^{(2)}\tau+Z^{(2)}+\text{cost.}\quad \tau_3=C^{(3)}\tau+Z^{(3)}+\text{cost.}\quad \text{ecc.}$$

Le presenti formule si dedurranno dalle (90) finchè a_{2n} non sia nullo, ovvero dalle (92), se fosse $a_{2n}=0$ senza che sia nullo a_{2n-1}, od infine dalle (95) nel caso in cui sieno simultaneamente $a_{2n}=0$, $a_{2n-1}=0$.

Ora se denotiamo i valori di τ, τ_1, τ_2, ecc. corrispondenti ad $x_n=b$ con κ, κ_1, κ_2, ecc., e supponiamo che per $x_n=b$, $x_1=b_1$, ... $x_{n-1}=b_{n-1}$ le funzioni $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ecc. assumano i valori $\Xi^{(1)}$, $\Xi^{(2)}$, ecc., e z_n, s_n divengano rispettivamente ξ_n, σ_n cosicchè sia

$$\sigma_n=(-1)^n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b,$$

raccoglieremo dalle (97), secondo i tre casi di a_{2n} positivo, negativo o nullo

$$(99)\qquad \tau-\kappa=\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}\log.\left\{\frac{a_0\sigma_n-\dfrac{1}{\sigma_n}(\xi_n+\sqrt{a_{2n}})^2}{a_0 s_n-\dfrac{1}{s_n}(z_n+\sqrt{a_{2n}})^2}\right\},$$

$$\tau-\kappa=\frac{1}{\sqrt{-a_{2n}}}\,\text{arc sen.}\,\frac{2\{z_n(a_0\sigma_n^2-\xi_n^2-a_{2n})-\xi_n(a_0 s_n^2-z_n^2-a_{2n})\}\sqrt{-a_{2n}}}{\sqrt{\{(a_0 s_n^2-z_n^2-a_{2n})^2-4a_{2n}z_n^2\}}\sqrt{\{(a_0\sigma_n^2-\xi_n^2-a_{2n})^2-4a_{2n}\xi_n^2\}}},$$

$$\tau-\kappa=\frac{2\{(\sigma_n-s_n)\sqrt{a_0}+z_n-\xi_n\}}{(s_n\sqrt{a_0}-z_n)(\sigma_n\sqrt{a_0}-\xi_n)},$$

e dalle (98) si otterrà

$$(100)\qquad \tau_1-\kappa_1=C^{(1)}(\tau-\kappa)+Z^{(1)}-\Xi^{(1)},\quad \tau_2-\kappa_2=C^{(2)}(\tau-\kappa)+Z^{(2)}-\Xi^{(2)},\quad \text{ecc.}$$

Conseguentemente dall' immediata integrazione di qualsivoglia delle equazioni (85), avendosi (79)

$$\Phi_{-q}(x_1)+\Phi_{-q}(x_2)+\ldots+\Phi_{-q}(x_n)=\tau_{q-1}+\text{cost.},$$

ne viene dal porre $x_n=b$,

$$\Phi_{-q}(b_1)+\Phi_{-q}(b_2)+\ldots+\Phi_{-q}(b_{n-1})=\varkappa_{q-1}+\text{cost.},$$

e quindi

$$(101)\qquad \Phi_{-q}(x_1)+\Phi_{-q}(x_2)+\ldots+\Phi_{-q}(x_n)=\Phi_{-q}(b_1)+\ldots+\Phi_{-q}(b_{n-1})+\tau_{q-1}-\varkappa_{q-1},$$

per qualsivoglia valore intero e positivo di q. Il valore di $\tau_{q-1}-\varkappa_{q-1}$ verrà esibito dalle formule (99) (100).

Conviene avvertire che qualora l'indice r della trascendente (79) sia negativo, non si potrebbe supporre l'origine $b=0$, perchè lo sviluppo in serie della funzione $\frac{x^r}{\sqrt{X}}$ contenendo allora le potenze negative r, $r+1$, $r+2$, ... -2, -1 di x, ci chiarisce che l'integrale (79), esteso da $x=0$ sino a qualsivoglia altro limite, diviene infinito ed anco immaginario nel caso di a_{2n} negativo. Per questa ragione i limiti dell'integrale (79) dovranno essere del medesimo segno allorchè r sia negativo. Coerentemente a simile osservazione si trova che, posta l'origine $b=0$, il valore di $\tau-\varkappa$, espresso dalla prima e dalla terza delle (99), diviene infinito, e quello esibito dalla seconda di dette formule diviene immaginario, attesochè a $b=0$ corrisponde $\sigma_n=0$, e (65) $\xi_n=\sqrt{a_{2n}}$.

Se invece di desumere l'espressione di τ da quella di t, nel modo or ora accennato nel presente § XII., si voglia dedurla dall'integrazione della prima delle formule (87), basterà porre nella (89) $r=n$, e si avrà a cagione di $A_n=a_{2n}$ (65)

$$d\tau=\frac{-2\frac{e^{t\sqrt{a_0}}}{H_n}\,dt}{a_{2n}-\frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{2}\vartheta_{n-1}-\frac{e^{t\sqrt{a_0}}}{H_n}\right)^2},$$

e poichè dalla (68) risulta

$$\tfrac{1}{2}\vartheta_{n-1}-\frac{e^{t\sqrt{a_0}}}{H_n}=a_0 s_n-z_n\sqrt{a_0}.$$

ponendo

$$\frac{1}{\sqrt{a_0}}\left(\tfrac{1}{2}\,\nu_{n-1}-\frac{e^{t\sqrt{a_0}}}{H_n}\right)=s_n\sqrt{a_0}-z_n=\psi\,,$$

troveremo

$$d\tau=\frac{2\,d\psi}{a_{2n}-\psi^2}\,,$$

ed integrando questa funzione, indi sostituendo $s_n\sqrt{a_0}-z_n$ in luogo di ψ, si otterrà, secondo i tre casi di a_{2n} positivo, negativo o nullo.

$$(102)\qquad \tau=\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}\log.\frac{\sqrt{a_{2n}}+s_n\sqrt{a_0}-z_n}{\sqrt{a_{2n}}-s_n\sqrt{a_0}+z_n}+\text{cost.}\,,$$

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{-a_{2n}}}\text{arc tang.}\frac{2\,(s_n\sqrt{a_0}-z_n)\sqrt{-a_{2n}}}{a_{2n}+(s_n\sqrt{a_0}-z_n)^2}+\text{cost}\,,$$

$$\tau=\frac{2}{s_n\sqrt{a_0}-z_n}+\text{cost.}$$

La prima e la seconda di queste espressioni di τ coincidono colle corrispondenti formule (97), ove si ponga (*Nota VIII*) nella prima

$$\text{cost.}=\frac{1}{(\tfrac{1}{2}\,\nu_{n-1}+\sqrt{a_0\,a_{2n}})\,C}\,,$$

e nell'altra

$$\text{cost.}=\frac{1}{\sqrt{-a_{2n}}}\text{arc tang}\frac{\sqrt{-a_0\,a_{2n}}}{\tfrac{1}{2}\,\nu_{n-1}}+C$$

§ XIII.

Veniamo ora a dimostrare come l'integrale di $\dfrac{x^r\,dx}{\sqrt{X}}$, in cui si suppone

$$X=a_{2n}+a_{2n-1}\,x+a_{2n-2}\,x^2+\ldots+a_{2n-q}\,x^q\,,$$

cioè X di grado q non superiore a $2n$, ed $r > q - 2$, si riduca a dipendere da' soli integrali delle funzioni di simil forma, in cui r assume i valori $0, 1, 2, \ldots q-2$.

Si assuma a questo scopo

$$(103) \qquad \int \frac{x^r \, dx}{\sqrt{X}} = (g_0 x^{r-q+1} + g_1 x^{r-q} + g_2 x^{r-q-1} + \ldots + g_{r-q+1}) \sqrt{X}$$

$$+ \int (h_{q-2} x^{q-2} + h_{q-3} x^{q-3} + h_{q-4} x^{q-4} + \ldots + h_0) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

riguardando g_0, g_1, g_2, ecc., h_0, h_1, h_2, ecc., come $r+1$ costanti da determinarsi, e prese le derivate de' due membri moltiplicate per $\sqrt{X}$, avremo l'identità da verificarsi

$$x^r = \tfrac{1}{2}(g_0 x^{r-q+1} + g_1 x^{r-q} + g_2 x^{r-q-1} + \ldots + g_{r-q+1}) \{ q a_{2n-q} x^{q-1} + (q-1) a_{2n-q+1} x^{q-2} + \ldots + a_{2n-1} \}$$

$$+ \{ (r-q+1) g_0 x^{r-q} + (r-q) g_1 x^{r-q-1} + \ldots + g_{r-q} \} \{ a_{2n-q} x^q + a_{2n-q+1} x^{q-1} + \ldots + a_{2n} \}$$

$$+ h_{q-2} x^{q-2} + h_{q-3} x^{q-3} + h_{q-4} x^{q-4} + \ldots + h_0 :$$

e conseguentemente

$$(104) \qquad (r - \tfrac{1}{2} q + 1) a_{2n-q} g_0 = 1,$$

$$(r - \tfrac{1}{2} q) a_{2n-q} g_1 + (r - \tfrac{1}{2} q + \tfrac{1}{2}) a_{2n-q+1} g_0 = 0,$$

$$(r - \tfrac{1}{2} q - 1) a_{2n-q} g_2 + (r - \tfrac{1}{2} q - \tfrac{1}{2}) a_{2n-q+1} g_1 + (r - \tfrac{1}{2} q) a_{2n-q+2} g_0 = 0,$$

ecc.

Prescindendo dalla prima di queste eguaglianze, da cui risulta

$$g_0 = \frac{1}{(r - \frac{1}{2} q + 1) a_{2n-q}},$$

tutte le susseguenti, che servono a determinare $g_1, g_2, \ldots g_{r-q+1}$ si possono rappresentare colla formula

$$(105)\qquad \{r - \tfrac{1}{2}(q + 2m)\}\, a_{2n-q}\, g_{m+1} + \{r - \tfrac{1}{2}(q + 2m - 1)\}\, a_{2n-q+1}\, g_m$$

$$+ \{r - \tfrac{1}{2}(q + 2m - 2)\}\, a_{2n-q+2}\, g_{m-1} + \ldots + \{r - \tfrac{1}{2}(q + m - 1)\}\, a_{2n-q+m+1}\, g_0 = 0\,.$$

in cui m è suscettibile de' successivi valori $0, 1, 2, \ldots r-q$, e si considera nulla ogni quantità a_p il cui indice sia superiore a $2n$. Se nella (105) attribuiamo ad m i valori $r-q+1$, $r-q+2, \ldots r-2$, $r-1$, riguardando nulle le quantità a_p i cui indici superano $2n$, ed ogni quantità g_m il cui indice m ecceda $r-q+1$; coll'aggiungere al primo membro della (105) il termine h_{r-m-1} avremo le equazioni determinanti h_{q-2}, $h_{q-3}, \ldots h_1$, h_0, cosicchè il valore di h_{r-m-1} sarà il primo membro della (105) cangiato di segno.

Mercè la riduzione (105) non sarà mestieri di protrarre l'integrazione delle equazioni (84), oltre quella in cui le potenze de' numeratori sono del grado $q-2$, e poichè q non eccede $2n$, non sarà mai necessario di integrare più di $n-1$ delle successive equazioni (84). Si è già notato (§ XII) che gl'integrali delle equazioni (85) si deducono da quelli delle equazioni (5) (84) col solo sostituire ad x_1, $x_2, \ldots$ x_n le loro reciproche $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}, \ldots$ $\frac{1}{x_n}$, e col permutare fra loro i coefficienti a_p, a_{2n-p}, imperocchè la formula $\frac{x_m^r\, \mathrm{d}\, x_m}{\sqrt{X_m}}$ mutasi allora in $\frac{-x_m^{n-r-2}\, \mathrm{d}\, x_m}{\sqrt{X_m}}$. Quindi è manifesto che la trascendente $\Phi_r(x_m)$, qualunque sia l'intero $r > 2n-2$, oppur negativo, si riconduce alle sole $2n-1$ trascendenti Φ_0, Φ_1, $\Phi_2 \ldots \Phi_{2n-2}$.

Se poi si tratti in generale di ogni funzione Abeliana rappresentata dalla formula $\int F(x, \sqrt{X})\, \mathrm{d}\, x$, in cui F si suppone funzione algebrica razionale di x e di $\sqrt{X}$; siccome questa funzione F non è che l'aggregato di espressioni frazionarie, i cui numeratori e denominatori sono funzioni intere di x e di $X^{\frac{1}{2}}$, cioè della forma

$$\frac{S + T\sqrt{X}}{U + V\sqrt{X}} = \frac{SU - TVX}{U^2 - V^2 X} + \frac{(UT - SV)X}{U^2 - V^2 X} \cdot \frac{1}{\sqrt{X}};$$

ne segue che la funzione differenziale $F(x, \sqrt{X})\, \mathrm{d}\, x$ si ridurrà, come

è noto, al più semplice aspetto

$$N \, \mathrm{d} x + \frac{P \, \mathrm{d} x}{\sqrt{X}},$$

in cui N, P sono funzioni razionali della sola x. Lo spezzamento della funzione P darà un aggregato di termini interi $A x^p$, e di frazioni parziali della forma $\frac{C}{(x-c)^q}$, e perciò la integrazione della formula generale $F(x, \sqrt{X}) \, \mathrm{d} x$ verrà a dipendere da quella delle due formule

$$\frac{x^p \, \mathrm{d} x}{\sqrt{X}}, \qquad \frac{\mathrm{d} x}{(x-c)^q \sqrt{X}}.$$

L'integrale della prima di queste è la trascendente $\Phi_p(x)$, di cui abbiamo non ha guari accennato la riduzione. L'altro integrale diviene una trascendente di simil forma $\Phi_{-q}(y)$, qualor si ponga $x - c = y$, poichè la funzione X si muta in una funzione di y intera e del medesimo grado. Vero è però che i coefficienti di questa funzione di y sarebbero immaginarii, ove sia $c = \varrho (\cos. \zeta + \sqrt{-1} \, \mathrm{sen.} \, \zeta)$; ma tuttavia si potrà eseguire la riduzione dell'aggregato di n o più trascendenti della specie $\Phi_{-q}(y)$ alla somma di $n-1$ consimili trascendenti, mercè le formule esposte nella presente Memoria, coll'estendere queste formule alla supposizione delle costanti immaginarie. E se si avverta, che nel caso di $c = \varrho (\cos. + \zeta \sqrt{-1} \, \mathrm{sen.} \, \zeta)$, alla frazione parziale

$$\frac{C \, \mathrm{d} x}{(x-c)^q \sqrt{X}},$$

in cui C sarà della forma immaginaria

$$H (\cos. K + \sqrt{-1} \, \mathrm{sen.} \, K),$$

trovasi aggiunta la frazione coniugata

$$\frac{C' \, \mathrm{d} x}{(x-c')^q \sqrt{X}},$$

per cui dev' essere

$$c' = \rho(\cos.\zeta - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.\zeta)\,, \quad C' = H(\cos.K - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.K)\,:$$

è facile comprendere, che trasformato del pari l' integrale di

$$\frac{\mathrm{d}x}{(x-c')^q\sqrt{X}}$$

nella funzione $\varphi_{-q}(y')$ col porre $x - c' = y'$, e ridotta la somma di n o più trascendenti della specie $\varphi_{-q}(y')$ alla somma di $n-1$ consimili trascendenti, se moltiplichiamo rispettivamente per C, C' i due gruppi delle $n-1$ funzioni simili a $\Phi_{-q}(y)$, e dell' altre $n-1$ funzioni simili a $\Phi_{-q}(y')$, e restituiamo $x-c$, $x-c'$ in luogo di y, y', osservando essere

$$C\,\Phi_{-q}(y) + C'\,\Phi_{-q}(y') = \int_b^x \left\{ \frac{C\,\mathrm{d}x}{(x-c)^q\sqrt{X}} + \frac{C'\,\mathrm{d}x}{(x-c')^q\sqrt{X}} \right\},$$

si troverà che l' aggregato di n o più trascendenti della forma

$$\int_b^x \left\{ \frac{C}{(x-c)^q} + \frac{C'}{(x-c')^q} \right\} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$

può ridursi alla somma di $n-1$ funzioni consimili, colla elisione dei termini affetti da $\sqrt{-1}$ (*Nota IX*). Possiamo dunque concludere, che la somma di n o più funzioni rappresentabili in generale con

$$\int_b^x F(x, \sqrt{X})\,\mathrm{d}x\,,$$

si riduce alla somma di $n-1$ funzioni di simil forma, e che questa riduzione si potrà eseguire mediante le relazioni esposte nel corso della presente Memoria.

§ XIV.

Ritenuto positivo il segno di $\sqrt{X_n}$ nelle equazioni (1), si potrebbe attribuire ad ogni altro di que' radicali $\sqrt{X_m}$ il segno positivo o negativo. Converrà allora applicare al detto radicale, come pure (79) a $\Phi_r(x_m)$, $\Phi_r(b_m)$, il medesimo segno positivo o negativo negli integrali algebrici delle equazioni (1) e nelle formule di riduzione (80), (82), (96), (101). Così l'integrale algebrico dell'equazione

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{\mathrm{d}\,x_2}{\sqrt{X_2}}=0\,.$$

nel caso di $n=2$ essendo (57) (48)

$$n_1=a_2+a_1(x_1+x_2)+a_0(x_1+x_2)^2-\frac{X_1+X_2}{(x_1-x_2)^2}+\frac{2\sqrt{X_1X_2}}{(x_1-x_2)^2}=c_1\,,$$

ossia (49)

$$-\frac{2\,a_0x_1^2x_2^2+a_1x_1x_2(x_1+x_2)+2\,a_2x_1x_2+a_3(x_1+x_2)+2\,a_4}{(x_1-x_2)^2}+\frac{2\sqrt{X_1X_2}}{(x_1-x_2)^2}=c_1:$$

quello dell'equazione

$$-\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{\mathrm{d}\,x_2}{\sqrt{X_2}}=0\,.$$

sarebbe

$$-\frac{2\,a_0x_1^2x_2^2+a_1x_1x_2(x_1+x_2)+2\,a_2x_1x_2+a_3(x_1+x_2)+2\,a_4}{(x_1-x_2)^2}-\frac{2\sqrt{X_1X_2}}{(x_1-x_2)^2}=c_1\,.$$

Ora se si formi l'equazione di secondo grado rapporto a c_1, la quale abbia per radici le due predette espressioni equivalenti a c_1, si avrà in essa l'integrale algebrico razionale di ciascuna delle due prefate equazioni differenziali, cioè a cagione dell'identità

$$-\frac{\{2\,a_0x_1^2x_2^2+a_1x_1x_2(x_1+x_2)+2\,a_2x_1x_2+a_3(x_1+x_2)+2\,a_4\}^2-4\,X_1X_2}{(x_1-x_2)^2}=$$

$$(4\,a_0a_2-a_1^2)x_1^2x_2^2+4\,a_0a_3x_1x_2(x_1+x_2)+4\,a_0a_4(x_1+x_2)^2+2\,a_1a_3x_1x_2+4\,a_1a_4(x_1+x_2)+4\,a_2a_4-a_3^2.$$

e per le posizioni (§ I.)

$$x_1 + x_2 = -s_1\,, \qquad x_1 x_2 = s_2\,,$$

donde risulta

$$(x_1 - x_2)^2 = s_1^2 - 4\,s_2\,,$$

si otterrà la seguente formula, già trovata dall' Eulero onde esprimere l'integrale algebrico dell'equazione

$$\pm \frac{\mathrm{d}\,x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{\mathrm{d}\,x_2}{\sqrt{X_2}} = 0\,,$$

e riferita da Lacroix (*Traité de Calcul differentiel et de Calcul integral* T. II n. 694 p. 480) col mutamento della costante c_1 in a_2 — cost..

$$(106) \qquad c_1^2(s_1^2 - 4\,s_2) + 2\,c\,(2\,a_0\,s_2^2 - a_1\,s_1\,s_2 + 2\,a_2\,s_2 - a_3\,s_1 + 2\,a_4)$$
$$-(4\,a_0\,a_2 - a_1^2)\,s_2^2 + 4\,a_0\,a_3\,s_1\,s_2 - 4\,a_0\,a_4\,s_1^2 - 2\,a_1\,a_3\,s_2 + 4\,a_1\,a_4\,s_1 - (4\,a_2\,a_4 - a_3^2) = 0\,.$$

Alla stessa guisa potremmo ottenere gli integrali algebrici razionali delle equazioni

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{\mathrm{d}\,x_2}{\sqrt{X_2}} + \frac{\mathrm{d}\,x_3}{\sqrt{X_3}} = 0\,,$$

$$\frac{x_1\,\mathrm{d}\,x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2\,\mathrm{d}\,x_2}{\sqrt{X_2}} + \frac{x_3\,\mathrm{d}\,x_3}{\sqrt{X_3}} = 0\,,$$

nella supposizione di $n = 3$, coll'attribuire successivamente a' radicali $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$ ciascuno de' segni $\pm$, e quindi dedurre dalla formula (48) quattro diversi valori di u_1, ed altrettanti valori di u_2, poscia col formare le due equazioni di quarto grado, che hanno per rispettive radici i valori di u_1, u_2. Siccome poi i coefficienti di queste equazioni sono funzioni simmetriche razionali delle variabili x_1, x_2, x_3, e perciò si possono esprimere razionalmente per mezzo di s_1, s_2, s_3 secondo i precetti di Waring; ne viene che gli integrali delle suddette equazioni, e in generale quelli delle (1), qualunque sia n, si potranno ridurre a funzioni algebriche razionali delle sole variabili s_1, $s_2 \ldots\, s_n$.

Ma la determinazione di siffatte espressioni di quegli integrali sarebbe assai laboriosa, anco nel caso di $n=3$, mentre possiamo invece agevolmente stabilire $n-1$ relazioni fra $s_1, s_2, \dots s_n$ allo scopo di formare l'equazione algebrica di grado $n-1$, che ha per radici gli argomenti $b_1, b_2, \dots b_{n-1}$ delle trascendenti, alla cui somma si riduce l'aggregato delle n trascendenti

$$\Phi_r(x_1)+\Phi_r(x_2)+\dots+\Phi_r(x_n).$$

Infatti designando con $E_{p,q}$, $G_{p,q}$ due costanti arbitrarie, possiamo nel modo stesso, con cui si dedussero le eguaglianze (65) (66) dalla (64), raccogliere, supponendo p, q numeri interi non superiori ad n,

$$(107) \qquad z_p \frac{\mathrm{d}\, z_q}{\mathrm{d}\, t} - z_q \frac{\mathrm{d}\, z_p}{\mathrm{d}\, t} = E_{p,q}, \qquad \frac{\mathrm{d}\, z_p}{\mathrm{d}\, t}\frac{\mathrm{d}\, z_q}{\mathrm{d}\, t} - a_0 z_p z_q = G_{p,q};$$

e poichè evidentemente ha luogo l'identità

$$(108) \qquad G_{p,p}\frac{\mathrm{d}\, z_q}{\mathrm{d}\, t} = G_{p,q}\frac{\mathrm{d}\, z_p}{\mathrm{d}\, t} - a_0 E_{p,q} z_p,$$

se in questa sostituiamo a p l'unità, ed a q gli altri numeri 2, 3,... n, avremo, a cagione delle eguaglianze (62) (63), le $n-1$ relazioni seguenti

$$(109) \qquad \begin{aligned} G_{1,1}(\tfrac{1}{2}\nu_1 - a_0 s_2) &= G_{1,2}(\tfrac{1}{2}a_1 - a_0 s_1) - a_0 E_{1,2}\sqrt{(A_1 - a_1 s_1 + a_0 s_1^2)},\\ G_{1,1}(\tfrac{1}{2}\nu_2 - a_0 s_3) &= G_{1,3}(\tfrac{1}{2}a_1 - a_0 s_1) - a_0 E_{1,3}\sqrt{(A_1 - a_1 s_1 + a_0 s_1^2)},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ G_{1,1}(\tfrac{1}{2}\nu_{n-1} - a_0 s_n) &= G_{1,n}(\tfrac{1}{2}a_1 - a_0 s_1) - a_0 E_{1,n}\sqrt{(A_1 - a_1 s_1 + a_0 s_1^2)}. \end{aligned}$$

Ora essendo $b_1, b_2, \dots b_{n-1}$ (§ X.) un sistema di valori delle variabili $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ corrispondenti ad $x_n = b$, se indichiamo con $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ i relativi valori di $s_1, s_2, \dots s_n$, e con ξ_r, $\frac{\mathrm{d}\,\xi_r}{\mathrm{d}\, t}$ quelli di z_r, $\frac{\mathrm{d}\, z_r}{\mathrm{d}\, t}$, si avrà manifestamente

$$(110) \qquad b^n + \sigma_1 b^{n-1} + \sigma_2 b^{n-2} + \dots + \sigma_{n-1} b + \sigma_n = 0.$$

e dalle (62) (63), postovi $x_n = b$, dedurremo

$$(111) \qquad \frac{d\xi_r}{dt} = \tfrac{1}{2}\nu_{r-1} - a_0\sigma_r, \quad \xi_r = \sqrt{(A_r - \nu_{r-1}\sigma_r + a_0\sigma_r^2)}.$$

Indi dalle (109), ovvero dalla (108) avremo

$$(112) \qquad G_{1,1}\frac{d\xi_2}{dt} = G_{1,2}\frac{d\xi_1}{dt} - a_0 E_{1,2}\xi_1,$$

$$G_{1,1}\frac{d\xi_3}{dt} = G_{1,3}\frac{d\xi_1}{dt} - a_0 E_{1,3}\xi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_{1,1}\frac{d\xi_n}{dt} = G_{1,n}\frac{d\xi_1}{dt} - a_0 E_{1,n}\xi_1;$$

inoltre sostituendo nella (110) i valori di $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ desunti dalla prima delle relazioni (111), e ponendo per brevità la costante

$$(113) \qquad a_0 b^n + \tfrac{1}{2}a_1 b^{n-1} + \tfrac{1}{2}\nu_1 b^{n-2} + \ldots + \tfrac{1}{2}\nu_{n-2} b + \tfrac{1}{2}\nu_{n-1} = \Delta,$$

si otterrà l'equazione

$$(114) \qquad b^{n-1}\frac{d\xi_1}{dt} + b^{n-2}\frac{d\xi_2}{dt} + \ldots + b\frac{d\xi_{n-1}}{dt} + \frac{d\xi_n}{dt} = \Delta,$$

la quale unitamente alle (111) (112) serve a determinare $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$.

A quest'uopo introduciamo nella (114) i valori di $\frac{d\xi_2}{dt}, \frac{d\xi_3}{dt}, \ldots \frac{d\xi_n}{dt}$ offerti dalle (112), ed otterremo

$$(115) \quad (b^{n-1}G_{1,1} + b^{n-2}G_{1,2} + \ldots + G_{1,n})\frac{d\xi_1}{dt} - a_0(b^{n-2}E_{1,2} + b^{n-3}E_{1,3} + \ldots + E_{1,n})\xi_1 = G_{1,1}\Delta$$

Abbiamo poi dalle (111), oppure dalla seconda delle (107), postovi $x_n = b$,

$$\frac{d\xi_1^2}{dt^2} - a_0\xi_1^2 = \tfrac{1}{4}a_1^2 - a_0 A_1 = G_{1,1},$$

e se sommiamo i due membri di quest'equazione moltiplicati per

$$(116) \quad F = a_0(b^{n-2}E_{1,2} + b^{n-3}E_{1,3} + \ldots + E_{1,n})^2 - (b^{n-1}G_{1,1} + b^{n-2}G_{1,2} + \ldots + G_{1,n})^2,$$

co' rispettivi due membri elevati al quadrato dell'equazione antecedente, indi dividendo i membri della nuova equazione per a_0 ne estragghiamo la radice, ricavasi

$$(117)\qquad (b^{n-2} E_{1,2} + b^{n-3} E_{1,3} + \dots + b\, E_{1,n-1} + E_{1,n}) \frac{d\xi_1}{dt}$$

$$- (b^{n-1} G_{1,1} + b^{n-2} G_{1,2} + \dots + b\, G_{1,n-1} + G_{1,n})\, \xi_1 = \sqrt{\left\{\frac{G_{1,1}(G_{1,1}\Delta^2 + F)}{a_0}\right\}}.$$

Ma a cagione dell' identità

$$(118)\qquad a_0 E_{r,p} E_{r,q} - G_{r,p} G_{r,q} = - G_{p,q} G_{r,r},$$

donde risulta

$$a_0 E_{1,2}^2 - G_{1,2}^2 = - G_{2,2} G_{1,1},$$

$$a_0 E_{1,2} E_{1,3} - G_{1,2} G_{1,3} = - G_{2,3} G_{1,1},$$

ecc.

e per le seguenti identità che sorgono dalle eguaglianze (46) (62) (107)

$$(119)\qquad a_0(\nu_1 - a_2) + \tfrac{1}{4} a_1^2 = G_{1,1},$$

$$a_0(\nu_2 - a_3) + \tfrac{1}{4}(\nu_1 a_1 + a_1 \nu_1) = 2\, G_{1,2},$$

$$a_0(\nu_3 - a_4) + \tfrac{1}{4}(\nu_2 a_1 + \nu_1 \nu_1 + a_1 \nu_2) = 2\, G_{1,3} + G_{2,2},$$

$$a_0(\nu_4 - a_5) + \tfrac{1}{4}(\nu_3 a_1 + \nu_2 \nu_1 + \nu_1 \nu_2 + a_1 \nu_3) = 2\, G_{1,4} + 2\, G_{2,3}.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$- a_0 a_{2n-1} + \tfrac{1}{4}(\nu_{n-1} \nu_{n-2} + \nu_{n-2} \nu_{n-1}) = 2\, G_{n-1,n},$$

$$- a_0 a_{2n} + \tfrac{1}{4} \nu_{n-1}^2 = G_{n,n},$$

se poniamo di conformità alla (2)

$$(120)\qquad B = a_0 b^{2n} + a_1 b^{2n-1} + a_2 b^{2n-2} + \dots + a_{2n-1} b + a_{2n}.$$

risulta

$$(121)\qquad G_{1,1}\Delta^2 + F = a_0 G_{1,1} B.$$

e conseguentemente, ritenuto il segno di $\sqrt{B}$ eguale a quello di $\sqrt{X_n}$.

si dovrà assumere col segno negativo il radicale costituente il secondo membro della (117), come verrà provato nel § XV, e si ritrae dalle equazioni (115) (117), avendo riguardo alle eguaglianze (116) (121),

$$(122)\quad \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{(b^{n-1} G_{1,1} + b^{n-2} G_{1,2} + \ldots + G_{1,n})\Delta + a_0 (b^{n-2} E_{1,2} + b^{n-3} E_{1,3} + \ldots + E_{1,n})\sqrt{B}}{\Delta^2 - a_0 B},$$

$$\xi_1 = \frac{(b^{n-2} E_{1,2} + b^{n-3} E_{1,3} + \ldots + E_{1,n})\Delta + (b^{n-1} G_{1,1} + b^{n-2} G_{1,2} + \ldots + G_{1,n})\sqrt{B}}{\Delta^2 - a_0 B}.$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni (112), e ponendo mente all'identità (118), ed a quest'altra che si deduce dalle (107)

$$G_{p,r} E_{p,q} - G_{p,q} E_{p,r} = G_{p,p} E_{r,q}$$

avremo in generale

$$(123)\quad \frac{d\xi_r}{dt} = \frac{(b^{n-1} G_{r,1} \ldots + G_{r,n})\Delta + a_0 (b^{n-1} E_{r,1} \ldots + b^{n-r+1} E_{r,r-1} + b^{n-r-1} E_{r,r+1} \ldots + E_{r,n})\sqrt{B}}{\Delta^2 - a_0 B},$$

e quindi dalla (108), postovi $p = r$, $q = 1$, $x_n = b$, otterremo

$$(124)\quad \xi_r = \frac{(b^{n-1} E_{r,1} \ldots + b^{n-r+1} E_{r,r-1} + b^{n-r-1} E_{r,r+1} \ldots + E_{r,n})\Delta + (b^{n-1} G_{r,1} + \ldots + G_{r,n})\sqrt{B}}{\Delta^2 - a_0 B}.$$

Avvertasi poi che si avrebbe (115) (120) (119)

$$(125)\quad \Delta^2 - a_0 B = G_{1,1} b^{n-2} + 2 G_{1,2} b^{n-3} + (2 G_{1,3} + G_{2,2}) b^{n-4} + \ldots + 2 G_{n\,n-1} b + G_{n,n}.$$

Trovata l'espressione di $\frac{d\xi_r}{dt}$ in funzione razionale di quantità che si esprimono razionalmente per mezzo di x_1, $x_2, \ldots x_n$, $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}, \ldots \sqrt{X_n}$, ricaveremo dalla prima delle (111) il valore di σ_r, indi denotando con $(-1)^r \sigma_r^{(0)}$ la somma de' prodotti delle quantità b_1, $b_2, \ldots b_{n-1}$ combinate ad r ad r, avremo analogamente alla (7)

$$(126)\quad \sigma_r^{(0)} = b^r + b^{r-1}\sigma_1 + \ldots + b\,\sigma_{r-1} + \sigma_r = -\left\{\frac{\sigma_{r+1}}{b} + \frac{\sigma_{r+2}}{b^2} + \ldots + \frac{\sigma_n}{b^{n-r}}\right\},$$

e verranno così espressi razionalmente in funzione di x_1, $x_2, \ldots x_n$, $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}, \ldots \sqrt{X_n}$ i coefficienti dell'equazione

$$(127)\quad b_m^{n-1} + \sigma_1^{(0)} b_m^{n-2} + \sigma_2^{(0)} b_m^{n-3} + \ldots + \sigma_{n-1}^{(0)} = 0,$$

le cui radici sono gli argomenti richiesti b_1, $b_2, \ldots b_{n-1}$.

Nel caso di $a_0 = 0$ essendo (107) (111) (114)

$$b^{n-1} G_{r,1} + b^{n-2} G_{r,2} + \ldots + G_{r,n} = \frac{d\xi_r}{dt}\left(b^{n-1}\frac{d\xi_1}{dt} + b^{n-2}\frac{d\xi_2}{dt} + \ldots + \frac{d\xi_n}{dt}\right) = \tfrac{1}{2}\varkappa_{r-1}\Delta,$$

si deduce dall'equazione (124)

$$(128) \qquad \xi_r = \frac{b^{n-1} E_{r,1} \ldots + b^{n-r+1} E_{r,r-1} + b^{n-r-1} E_{r,r+1} \ldots + E_{r,n} + \tfrac{1}{2}\varkappa_{r-1}\sqrt{B}}{\Delta},$$

indi dalla 2.ª delle relazioni (111), postovi $a_0 = 0$, avremo

$$(129) \qquad \sigma_r = \frac{A_r - \xi_r^2}{\varkappa_{r-1}}.$$

Però se con a_0 fosse nullo anco a_1, questa espressione non ci darebbe il valore di σ_1. Converrà allora ricavare σ_1 dalla relazione (46), che per $r = 3$, $x_n = b$ ci esibisce l'eguaglianza

$$(130) \qquad \varkappa_2 + \varkappa_1\sigma_1 = a_3 - 2\xi_1\xi_2,$$

in cui sparisce $\varkappa_2$ nel caso di $n = 2$.

§ XV.

Applichiamo a' casi più semplici il metodo esposto nel § XIV, onde formare l'equazione (127) che ha per radici i cercati argomenti b_1, $b_2, \ldots b_{n-1}$.

Pongasi primieramente $n = 2$, e si avrà per l'eguaglianze (111) (123) (125)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0} - \frac{(b G_{1,1} + G_{1,2})\left(b^2 + \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0} b + \frac{1}{2}\frac{\varkappa_1}{a_0}\right) + E_{1,2}\sqrt{B}}{G_{1,1} b^2 + 2 G_{1,2} b + G_{2,2}}.$$

Conseguentemente risulta

$$(131) \qquad \sigma_1^{(0)} = \frac{G_{1,2} b^2 + \left(G_{2,2} + \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0} G_{1,2} - \frac{1}{2}\frac{\varkappa_1}{a_0} G_{1,1}\right) b + \frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0} G_{2,2} - \frac{1}{2}\frac{\varkappa_1}{a_0} G_{1,2} - E_{1,2}\sqrt{B}}{G_{1,1} b^2 + 2 G_{1,2} b + G_{2,2}}$$

$$= \frac{(\frac{1}{4} a_1\varkappa_1 - \frac{1}{2} a_0 a_3) b^2 + (\frac{1}{2} a_2\varkappa_1 - \frac{1}{4}\varkappa_1^2 - \frac{1}{4} a_1 a_3 - a_0 a_4) b + \frac{1}{4} a_3\varkappa_1 - \frac{1}{2} a_1 a_4 - E_{1,2}\sqrt{B}}{(\frac{1}{4} a_1^2 + a_0\varkappa_1 - a_0 a_2) b^2 + (\frac{1}{2} a_1\varkappa_1 - a_0 a_3) b + \frac{1}{4}\varkappa_1^2 - a_0 a_4}.$$

Si può verificare questa espressione nel caso di $b=0$, $a_0=0$. $a_1=0$, coll'applicarla all'equazione

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\sqrt{(1-x_1^2)}}+\frac{\mathrm{d}\,x_2}{\sqrt{(1-x_2^2)}}=0\,,$$

e si avrà

$$b_1=-\sigma_1^{(0)}=\frac{2\,z_1}{r_1}=-\frac{2\,z_1}{1+z_1^2}=-\frac{2\,(x_1-x_2)\left\{\sqrt{(1-x_1^2)}-\sqrt{(1-x_2^2)}\right\}}{(x_1-x_2)^2+\left\{\sqrt{(1-x_1^2)}-\sqrt{(1-x_2^2)}\right\}^2}$$

$$=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1\sqrt{(1-x_2^2)}-x_2\sqrt{(1-x_1^2)}}=x_1\sqrt{(1-x_2^2)}+x_2\sqrt{(1-x_1^2)}\,,$$

in conformità alla nota relazione di Trigonometria

$$\text{arc sen.}\,x_1+\text{arc sen.}\,x_2=\text{arc sen.}\left\{x_1\sqrt{(1-x_2^2)}+x_2\sqrt{(1-x_1^2)}\right\}.$$

Supponiamo in secondo luogo $n=3$, $b=0$, e troveremo (126) (111) (125)

$$(132)\qquad \sigma_1^{(0)}=\frac{1}{2}\,\frac{a_1}{a_0}-\frac{\frac{1}{2}\,G_{1.3}\,\frac{u_2}{a_0}+E_{1,3}\sqrt{a_6}}{\frac{1}{4}\,u_2^2-a_0\,a_6}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\,u_2^2\,s_1+\frac{1}{4}\,a_1\,u_2\,s_3-\frac{1}{2}\,a_0\,u_2\,s_1\,s_3+\frac{1}{2}\,u_2\,z_1\,z_3-\frac{1}{2}\,a_1\,a_6-E_{1.3}\sqrt{a_6}}{\frac{1}{4}\,u_2^2-a_0\,a_6}\,,$$

$$\sigma_2^{(0)}=\frac{1}{2}\,\frac{u_1}{a_0}-\frac{\frac{1}{2}\,G_{2.3}\,\frac{u_2}{a_0}+E_{2,3}\sqrt{a_6}}{\frac{1}{4}\,u_2^2-a_0\,a_6}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\,u_2^2\,s_2+\frac{1}{4}\,u_1\,u_2\,s_3-\frac{1}{2}\,a_0\,u_2\,s_2\,s_3+\frac{1}{2}\,u_2\,z_2\,z_3-\frac{1}{2}\,a_6\,u_1-E_{2.3}\sqrt{a_6}}{\frac{1}{4}\,u_2^2-a_0\,a_6}\,.$$

Pria di dar fine alle presenti ricerche non lascieremo di notare che se il grado q della funzione X sottoposta al segno radicale (2) fosse inferiore a $2\,n-1$, cioè se si avesse $q=2\,(n-i)$, oppure $q=2\,(n-i)-1$, si potrà ridurre la somma delle n trascendenti

$$\Phi_r(x_1)+\Phi_r(x_2)+\ldots+\Phi_r(x_n)\,.$$

a quella di $n-i-1$ consimili trascendenti, e formare l'equazione di grado $n-i-1$, le cui radici sono gli argomenti delle nuove funzioni, col sussidio delle formule esposte nel § XIV.

Infatti nella stessa guisa con cui l'aggregato delle n trascendenti testè indicate si riconduce alla somma delle $n-1$ funzioni

$$\Phi_r(b_1)+\Phi_r(b_2)+\ldots+\Phi_r(b_{n-1}),$$

si potrà ridurre questa somma, ove sia $q<2n-1$, all'aggregato di $n-2$ consimili funzioni, i cui argomenti $b_1^{(1)}$, $b_2^{(1)}, \ldots$ $b_{n-2}^{(1)}$ saranno radici d'una equazione del grado $n-2$; e denotata con B_m una funzione di b_m simile alla (120), i coefficienti $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_2^{(1)}, \ldots$ $\sigma_{n-2}^{(1)}$ di questa equazione si esprimeranno per mezzo di b_1, $b_2, \ldots$ b_{n-1}, $\sqrt{B_1}$, $\sqrt{B_2}, \ldots$ $\sqrt{B_{n-1}}$, come i coefficienti dell'equazione (127) si esprimono in funzione di x_1, $x_2, \ldots$ x_n, $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}, \ldots$ $\sqrt{X_n}$.

Ora è facile rilevare che per la formula (11) e per l'equazione (18) risulta

$$z_1 x_m^{n-1}+z_2 x_m^{n-2}+z_3 x_m^{n-3}+\ldots+z_{n-1} x_m+z_n=\sqrt{X_m},$$

e se in questa eguaglianza poniamo $x_n=b$, e quindi sostituiamo b_m ad x_m, e le quantità rispettive ξ_1, $\xi_2, \ldots$ ξ_n in luogo di z_1, $z_2, \ldots$ z_n, avremo

$$(133)\qquad \sqrt{B_m}=\xi_1 b_m^{n-1}+\xi_2 b_m^{n-2}+\xi_3 b_m^{n-3}+\ldots+\xi_{n-1} b_m+\xi_n.$$

Pertanto i coefficienti $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_2^{(1)}, \ldots$ $\sigma_{n-2}^{(1)}$ dell'equazione di grado $n-2$ che ha per radici $b_1^{(1)}$, $b_2^{(1)}, \ldots$ $b_{n-2}^{(1)}$, si esprimeranno (124) (125) in funzioni razionali di b_1, $b_2, \ldots$ b_{n-1}, e siccome queste funzioni sono evidentemente simmetriche, se $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}, \ldots$ $\sqrt{X_n}$ nelle date equazioni (1) hanno il medesimo segno, saranno pure simmetriche se qualcuno di que' radicali $\sqrt{X_m}$ abbia il segno opposto; imperocchè tuttavia $\sqrt{B_m}$ che deesi prendere collo stesso segno di $\sqrt{X_m}$ verrebbe espresso dalla formula (133), se non che allora $\sqrt{X_m}$ verrà mutata di segno nelle espressioni delle quantità comprese con b nelle formule (124) (125). Per conseguenza i coefficienti della nuova equazione $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_2^{(1)}, \ldots$ $\sigma_{n-2}^{(1)}$ essendo sempre funzioni simmetriche razionali di b_1, $b_2, \ldots$ b_{n-1} potrannosi esprimere pe' coefficienti $\sigma_1^{(0)}$, $\sigma_2^{(0)}, \ldots$ $\sigma_{n-1}^{(0)}$ dell'equazione (127), e diverranno funzioni esplicite razionali di x_1, $x_2, \ldots$ x_n, $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}, \ldots$ $\sqrt{X_n}$.

Se fosse $q<2n-3$ si potrà passare in simil guisa ad una equazione di grado $n-3$, che avrà per radici gli argomenti $b_1^{(2)}$, $b_2^{(2)}, \ldots$

$b^{(2)}_{n-3}$ di altrettante funzioni della forma $\Phi_r(b^{(2)}_m)$, alla cui somma si ridurrà l'aggregato delle $n-2$ funzioni precedenti. In generale, supposto $q=2(n-i)$, oppure $q=2(n-i)-1$, si giungerà infine con simile procedimento ad una equazione del grado $n-i-1$, le cui radici $b^{(i)}_1, b^{(i)}_2, \ldots b^{(i)}_{n-i-1}$ saranno gli argomenti delle $n-i-1$ funzioni, alla cui somma si può ridurre l'aggregato delle n proposte funzioni di simil forma, e i coefficienti $\sigma^{(i)}_1, \sigma^{(i)}_2, \ldots \sigma^{(i)}_{n-i-1}$ di quest'ultima equazione verranno pure espressi razionalmente in funzione di $x_1, x_2, \ldots x_n, \sqrt{X_1}, \sqrt{X_2}, \ldots \sqrt{X_n}$. Riserviamo ad altra Memoria lo sviluppo de' calcoli, che servono a formare questa equazione, e di quelli accennati nel § XIII.

Osserveremo a questo luogo che avendosi dalle (107)

$$G_{1\,p}\,z_1 - E_{1\,p}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = z_p\,G_{1,1},$$

ossia, posto $x_n = b$,

$$G_{1\,p}\,\xi_1 - E_{1\,p}\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} = \xi_p\,G_{1,1};$$

si ritrae dalle equazioni (117) (121), sostituendovi in luogo di b un'altra radice b_m della (110), l'equazione (133), e si riconosce che il radicale costituente il secondo membro della (117) deesi prendere col segno negativo, come abbiamo asserito nel § XIV.

Dobbiamo infine esaminare come si modifichi l'espressione (13) di v_p, da cui dipendono quelle di z_r, u_{r-1}, $\frac{\mathrm{d}z_r}{\mathrm{d}t}$ (14) (28) (62), allorchè alcuni de' dati argomenti $x_1, x_2, \ldots x_n$ sieno eguali fra loro.

In questo caso è d'uopo che i radicali delle funzioni X_1, X_2 ecc. de' rispettivi argomenti x_1, x_2 ecc. che si suppongono eguali, sieno affetti nelle equazioni (1) dal medesimo segno, altrimenti sparirebbero le coppie di funzioni eguali ed opposte di segno da' gruppi (80) (82) (96) (101), e l'impossibilità della riduzione sarebbe indicata dal valore infinito di v_p. Ora supponendo primieramente $x_1 = x_2$ e i radicali $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$ affetti dallo stesso segno nella formula (13), troviamo per la regola determinante il valore delle funzioni che vanno a $\frac{0}{0}$

$$\frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{f'(x_1)} + \frac{x_2^{p-1}\sqrt{X_2}}{f'(x_2)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left\{\frac{x_2^{p-1}\sqrt{X_2}}{(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} - \frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}\right\} = D_{x_1}\frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}.$$

In seguito se fosse $x_3 = x_2 = x_1$, semprechè sieno del medesimo segno $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$, $\sqrt{X_3}$, avremo

$$\frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{f'(x_1)} + \frac{x_2^{p-1}\sqrt{X_2}}{f'(x_2)} + \frac{x_3^{p-1}\sqrt{X_3}}{f'(x_3)} = D_{x_1}\frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} + \frac{x_3^{p-1}\sqrt{X_3}}{f'(x_3)}$$

$$= \frac{1}{(x_3-x_1)^2}\left\{\frac{x_3^{p-1}\sqrt{X_3}}{(x_3-x_4)\ldots(x_3-x_n)} - \frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)} - (x_3-x_1)D_{x_1}\frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}D^2_{x_1}\frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{(x_1-x_4)\ldots(x_1-x_n)}.$$

Così procedendo si troverà in generale, che per un numero m di argomenti eguali $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_m$, purchè sieno tutti del medesimo segno i rispettivi radicali $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$, ... $\sqrt{X_m}$, risulta

$$(134)\qquad \frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{f'(x_1)} + \frac{x_2^{p-1}\sqrt{X_2}}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{x_m^{p-1}\sqrt{X_m}}{f'(x_m)} = \frac{1}{2.3\ldots(m-1)}D^{m-1}_{x_1}\frac{x_1^{p-1}\sqrt{X_1}}{(x_1-x_{m+1})\ldots(x_1-x_n)},$$

cosicchè, se tutte le quantità x_1, x_2, ... x_n fossero eguali fra loro, si troverebbe

$$(135)\qquad c_p = \frac{1}{2.3\ldots(n-1)}D^{n-1}.\ x_1^{p-1}\sqrt{X_1}.$$

La teorica degli integrali delle funzioni, che involgono il radicale di qualunque grado d'una funzione intera, potrà divenire il soggetto di analoghe ricerche analitiche.

(Presentata li 10 Agosto 1846 e 30 Gennaio 1847)

NOTE

Nota I. all'Introduzione. Veggasi il T. III pag 343 del Giornale di Matematiche del sig Crelle di Berlino. Nel T. IV dello stesso Giornale pag. 200, e nella Memoria coronata dall'Accademia delle scienze di Parigi (*Mémoires des Savans étrangers*, T. VII), il celebre Abel pervenne ad un simile teorema per gli integrali di tutte le funzioni che involgono la radice d'un'equazione algebrica, i cui coefficienti sono funzioni intere e razionali di x. Il sig. Hermite, che s'era già segnalato colla divisione degli argomenti nelle funzioni inverse delle abeliane, prese a considerare le inverse delle nuove trascendenti a derivata algebrica (Liouville, *Journal de Mathématiques*, octobre 1844). Poscia l'insigne Jacobi osservò che queste funzioni inverse si possono comporre algebricamente di funzioni ad una variabile; e nel Vol. I. pag. 383 delle sue Opere (Berlino 1846) presentò sotto un nuovo aspetto gli integrali delle equazioni (1) ch'egli chiama ultra-ellittiche. Altre importanti Memorie di rinomati autori sulle trascendenti abeliane, e su quelle a derivata algebrica trovansi nel citato Giornale del benemerito sig Crelle.

Nota II. al § I. Si attribuisce alla somma indicata col segno Σ il limite superiore $p = 2n+1$, per mantenere l'analogia colla nota formula $\sum_{p=0}^{p=r+1} \varphi(p) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(r)$ nell'ipotesi di $\Delta p = 1$.

Nota III. al § III. Ho collocato superiormente gli indici $p+1$, $p+2$, ec. de' coefficienti posteriori ad α_p nella espressione di R per avvertire, che il solo α_p si determina colla stessa legge a cui obbediscono α_0, α_1, α_2, ... α_{p-1}.

Nota IV. al § V. Denotando con $S^{(r)}$ la somma delle potenze di grado r delle quantità x_1, x_2, ... x_n si raccoglie dalle relazioni che passano fra $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ec. s_1, s_2, ec., e dalle eguaglianze (31) la relazione

$$S^{(r)} + \gamma_1 S^{(r-1)} + \gamma_2 S^{(r-2)} + \ldots + \gamma_{r-1} S^{(1)} = r\gamma_r .$$

Nota V. al § VIII. Nel T. XXIII delle Memorie della Società italiana (Parte matematica) il chiarissimo sig. prof. G. Mainardi, dopo di avere espresso colla (28) uno de' due integrali delle equazioni (1) nel caso di $n=3$, e nella supposizione di $a_0 = 0$ $a_1 = 1$, rappresenta l'altro integrale con una formula che spetterebbe al sistema (65), ma che non si accorda del tutto coll'espressione risultante dal porre nella (65) $r=2$.

Nota VI. al § IX. Eliminando una delle variabili x_1, x_2 fra l'espressione del moltiplicatore F e quella di $\nu_1 = a_2 + \Phi$ (28) si troverà eliminata anco l'altra variabile, e si avrà

$$F = \sqrt{\{a_1^2 a_4 + a_3^2 a_0 - 4\, a_0 a_2 a_4 + (4\, a_0 a_4 - a_1 a_3)\nu_1 + a_2 \nu_1^2 - \nu_1^3\}}.$$

Di più se dall'equazione (106), ponendovi ν_1, b, b_1, in luogo di c_1, x_2, x_1, ricaviamo b_1, e ne paragoniamo il valore con quello offerto dalle (127) (131), otterremo $F = E_{1,2}$.

Nota VII. al § XI. Senza eseguire le integrazioni si potrebbe conseguire successivamente t_1, t_2, t_3, ec. introducendo nelle (86) i valori (62) di s_1, s_2, s_3 ec., e per brevità le costanti ν_1, ν_2, ν_3 ec. determinate dalle relazioni

$$2\, a_0 \nu_1 + \nu_0 = 0, \quad 2\, a_0 \nu_2 + \nu_0 \nu_1 + \nu_1 = 0, \quad 2\, a_0 \nu_3 + \nu_0 \nu_2 + \nu_1 \nu_1 + \nu_2 = 0 \quad \text{ec.},$$

indi ordinando rapporto a dz_1, dz_2, dz_3 ec. in modo che un gruppo qualunque affetto dal fattore dz_m non contenga le differenziali delle posteriori variabili ad indice più elevato. Per avere t_1, t_2, t_3 ec. basterà sostituire in ogni gruppo a' coefficienti de' varii termini nuove costanti indeterminate, e scrivere z_m in luogo del fattore dz_m. Si otterranno i valori de' coefficienti indeterminati paragonando le differenziali delle nuove formule colle precedenti. Del resto venne già assegnato dallo stesso Abel e da Jacobi (Opere matematiche, Vol. I. pag. 281) il valore di $t_p - k_p$ (95) mercè lo sviluppo in serie d'una data funzione, e si potrebbe ancora dedurre t_1, t_2, t_3, ec. dall'integrazione delle formule (86) espresse in funzione di s_1 mediante le relazioni (67) (109).

Nota VIII. al § XII. È facile provare l'equivalenza delle prime due formule (97) colle rispettive (102), imperocchè sottraendo quelle da queste troviamo a cagione della (63)

$$\left\{a_0 s_n - \frac{1}{s_n}(z_n + \sqrt{a_{2n}})^2\right\} \frac{\sqrt{a_{2n}} + s_n\sqrt{a_0} - z_n}{\sqrt{a_{2n}} - s_n\sqrt{a_0} + z_n} = \frac{z_n^2 - (s_n\sqrt{a_0} + \sqrt{a_{2n}})^2}{s_n} = -(\nu_{n-1} + 2\sqrt{a_0 a_{2n}}).$$

$$\frac{2\,(s_n\sqrt{a_0} - z_n)\,(\frac{1}{2}\nu_{n-1} s_n - a_{2n}) - \{a_{2n} + (s_n\sqrt{a_0} - z_n)^2\}\, z_n}{\{a_{2n} + (s_n\sqrt{a_0} - z_n)^2\}\,(\frac{1}{2}\nu_{n-1} s_n - a_{2n}) - 2\,(s_n\sqrt{a_0} - z_n)\, a_{2n} z_n} \sqrt{-a_{2n}} = \frac{\sqrt{-a_0 a_{2n}}}{\frac{1}{2}\nu_{n-1}}.$$

Nota IX. al § XIII. Nel modo stesso con cui Legendre ridusse le trascendenti ellittiche a tre sole specie, il preclaro analista sig. Richelot nella sua prima Memoria sugli integrali abeliani di primo ordine (Giornale del sig. Crelle, T. XII. pag. 221) dimostra, che questi integrali, cioè le trascendenti rappresentate dalla formula $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{X}}$, in cui P è una funzione razionale di x, ed X una funzione intera del 5° o del 6° grado, si possono ridurre a cinque specie senza alcun intervento di quantità immaginarie.

CONSIDERAZIONI

INTORNO AL GENERE ED ALLA SPECIE

IN BOTANICA

DEL PROF. ROBERTO DE VISIANI

In tanto fervore di studii, con che gli uomini d'oggidì si volgono alle scienze naturali in generale, ed alla botanica in particolare, dotti ed indotti, iniziati e provetti muovono egual lamento sulla soverchia mutabilità, e conseguente moltiplicità de' nomi, con che i varii botanici salutano la stessa pianta. Coloro, che in questo piacevolissimo studio non cercano meglio che un utile passatempo, si lagnano di trovarvi invece per questa causa noia e difficoltà; e queglino stessi che la scienza professano, veggono con dolore, che la incostanza e la moltitudine de' nomi sta per avvolgerla in una confusione peggior dell'antica, e sempre più inestricabile. Di che ne viene che i primi, mancato loro il diletto che ne speravano, se ne disgustano e l'abbandonano; i secondi con grave danno di lei sono costretti a perdere nell'apprendimento e riscontro de' varii nomi un tempo prezioso, che avrebbero meglio impiegato nello studio delle parti sue più essenziali. Tentarono di giovare, almeno a questi ultimi, uomini pazientissimi e diligenti, compilando grossi volumi di sinonimia; ma codesti

lavori e sono di lor natura imperfetti perchè soggetti a continue vicende di mutamenti e di giunte, per cui non soccorrono che incompletamente, sol pel momento, ed a' soli botanici che appunto men ne abbisognano, e d'altra parte non rimediano al male perchè non tendono a toglierne la vera causa.

Mirando addentro di tanto disordine della nomenclatura non è difficile l'avvedersi, parecchie essere le cagioni che concorrono a produrlo ed a mantenerlo, ma nessuna al certo essere più dannosamente efficace di quella che consiste nella incertezza ed inesattezza del concetto che buona parte de' botanici novatori si forma del genere e della specie, nonchè del valore che attribuiscono ai caratteri su cui quello e questa si fondano. Per essi ogni lieve diversità, ogni piccola modificazione di forma negli organi delle piante paiono sufficienti a separare alcuni individui da una specie, alcune specie da un genere per farne poscia un'aggregazione distinta, a cui tosto gli è forza d'imporre un novello nome. Quindi è che la fondazione de' nuovi generi, delle nuove specie, e quindi de' nuovi nomi, dipende al tutto dal differente grado d'importanza che dà l'uno o l'altro botanico a quel dato carattere o a quel dato organo, per farne, o no, un nuovo genere o una specie nuova, ed è quindi in questo diverso modo di vedere il valor dei caratteri sia generici sia specifici che risiede la causa prima della lamentata moltiplicità de' nomi nei vegetabili. S'egli fosse possibile l'additare norme più o men sicure per giudicare rettamente di tal valore, e fissare più nettamente il concetto vero del genere e della specie, si torrebbe certamente alla scienza una sorgente inesausta di nuovi nomi, e, che più monta, di tanti errori, quanti sono i falsi generi e le false specie, che provennero e provengono tutto di dall'averle o sconosciute o neglette.

Convinto da lunga pezza della utilità, e dirò anzi della necessità del lavoro, nonchè della maggiore opportunità sua in questo tempo, in cui la scienza è piucchè mai bersagliata dalla smania sfrenata de' fabbricatori di generi e dei coniatori di nomi, mi sono attentato di porvi mano, meravigliando insieme e dolendomi che botanici più di me consumati ed autorevoli non l'abbiano fatto ancora, malgrado la

evidenza urgentissima del bisogno, che pure in ogni opera fitografica viene confessato e riconosciuto. Ho raccolto perciò dalle opere di tassonomia più celebri e più degne della lor fama tutto ciò ch'era stato detto di meglio nell'argomento; ne ho fatto quella critica spassionata che mi fu suggerita e dalle osservazioni degli altri, quando le ho trovate conformi ai fatti, e da quelle ancora che una qualche sperienza in siffatti studii ha potuto somministrarmi; e ho cercato da queste indagini e da questo esame di dedurre le regole che a me parvero fondamentali per la creazione de' generi e delle specie, e per la più retta estimazione de' caratteri che li distinguono. Raccoglitore e commentatore di leggi altrui io non m'arrogo altro titolo all'infuori di questo di avere sceverato dalle molte dottrine pubblicate sull'argomento quelle che l'esperienza ha sancito, di avervene aggiunta alcun'altra, che la osservazione posteriore mi ha mostrato non meno vera o men utile, e di aver chiarito e quelle e queste con esempii e con fatti che ne comprovano l'esattezza.

Non dubito però che a queste regole pella grande mutabilità dei caratteri fitografici non sieno per iscoprirsi delle eccezioni; non dubito nè anche che uno studio più attento rivolto in seguito più di proposito a questo ramo di scienza possa scoprirne di nuove: ma l'uno e l'altro di questi risultamenti se mostrerà da un lato la imperfezione del mio lavoro (ned io il credo compiuto), promuoverà insieme il perfezionamento di questa parte rilevantissima della scienza, e quindi corrà ei pure lo scopo vero ch' io m' ho proposto nell' imprendere la presente fatica.

PARTE I.

DEL GENERE

Quamdiu summi systematici novos introducebant characteres novosque conceptus generis, tamdiu barbariei exposita gemuit botanices scientia.

LINN. Phil. bot. character. p. 135 n. 202.

Gli antichi botanici non avevano idea precisa del genere, perciò si contentavano di raccorre in una serie, che domandavano genere. quelle piante che crescevano in un medesimo luogo, o fiorivano nella stessa stagione, o aveano qualità ed usi comuni, o si assomigliavano in organi di secondaria importanza, quali erano le radici e le foglie. Con ciò confondevano la distinzione generica delle piante colla loro distribuzione geografica, o colla coincidenza dell' epoca in cui fioriscono, o colla loro classificazione tecnologica, o colla stessa loro distinzione specifica. Il primo ad avvisarsi di ravvicinare fra loro le piante simili pei caratteri del fiore e del frutto si fu nella seconda metà del secolo decimosesto il celebre Corrado Gesnero, e nel principio del successivo il non meno illustre Fabio Colonna. A questi due sommi è pertanto da riferirsi il merito della prima e retta istituzione dei generi: ma l'applicazione de' loro principii. benchè in parte eseguita dal Morison e dal Ray, non fu estesa a tutti i generi delle piante, nè a questi furono assegnati i caratteri differenziali che dal celebre Tournefort.

Gli è perciò, che ad esso viene attribuita la gloria se non della invenzione, almeno della prima sistemazione dei generi, avendo egli pel primo fissate alcune regole da seguirsi nel costruirli. Però questo

grande botanico omise di far parola fra i caratteri generici di quelli tratti dagli stami, dallo stilo, e dallo stimma, che considerò puramente quali organi escretorii del fiore, e poche volte descrisse il calice; talchè i caratteri di questo e degli organi testè indicati risultano ne' suoi generi più dalle figure dell'opera che dal testo, e più debbono alla diligenza del pittore che del botanico. V'aggiunse invece talvolta ai caratteri tratti dalla corolla, dall'ovario e dal frutto, quelli desunti da qualche organo estraneo alla riproduzione, come la radice; o dagli accessorii della medesima, come le brattee; o da quelli tratti dall'aspetto generale della specie, che è ciò che dicesi abito o portamento. Dopo di lui, botanici di minor nome ne neglessero sciaguratamente le dottrine e l'esempio, e tornarono all'antica licenza, sino a che nella seconda metà del passato secolo il grande legislatore della botanica postosi a riordinare le parti tutte di questa scienza, ritornò in onore il canone fondato dal Gesnero, applicato dal Tournefort, lo estese a tutti gli organi della riproduzione non accettati da questo, e rifiutò tutti gli altri caratteri secondarii dal Tournefort aggiunti ai generici, riputandoli non necessarii alla esatta distinzione dei generi.

Guidato da tai principii il Linneo prese in esame tutti i generi del francese botanico, e giudicatili secondo le nuove regole da esso date, e secondo il valore attribuito alle varie parti riproduttrici, ed alle loro modificazioni, ne adottò la massima parte, n'escluse parecchi, ne aggiunse quasi altrettanti, assegnando a tutti, chiari e precisi caratteri desunti da tutte le parti del fiore e frutto. Quindi è, che se al Gesnero e al Colonna spetta la gloria di aver fissata l'idea vera del genere, al Tournefort quella di averla applicata alle piante allor note, al Linneo si appartiene il doppio merito e d'avere fondate le vere leggi che guidar denno il botanico nella creazione de' generi, e di averne estesa l'applicazione oltre ai generi del Tournefort anche a tutti quelli scoperti dopo. Or queste leggi da lui consegnate in quell'aureo codice della scienza, che intitolò *Filosofia botanica*, essendo l'ultimo risultamento degli studii fatti sull'intero regno de' vegetabili da una mente atta ed avvezza ad abbracciare d'un guardo l'intera natura, e a coglierne sicuramente le analogie e le attinenze, basta-

rono lungamente qual certa norma ai botanici nella fondazione ed accettazione de' generi, e le osservazioni posteriori non fecero quasi sempre che raffermarne la convenienza e la verità.

In appresso un uomo per ampiezza di vedute, per dovizia di cognizioni, e per talento di osservazione degno di succedere all'immortale svedese, Augusto Piramo De Candolle pubblicava nel principio di questo secolo sotto il titolo di *Teoria elementare della botanica* un'opera meritevole per molte parti di stare accanto al codice Linneano, nella quale venivano rivedute le leggi da questo imposte alla creazione de' generi, ed accresciute di alcune norme ed avvertenze utilissime. Finalmente dopo di lui il degnissimo figlio suo e successore A. De Candolle, nella *Introduzione allo studio della botanica* esaminò a lungo il valore degli organi e de' caratteri, tentando di classificar quelli e questi secondo il grado di loro importanza, affinchè i botanici potessero adoperarli con più concordia e con più sicurezza nella fondazione de' generi.

Si furono questi i botanici che più di proposito trattassero questa parte di scienza, e ne discutessero le dottrine: perlochè ci contenteremo di esaminare quanto eglino ne scrissero, facendoci carico a luogo debito delle osservazioni fatte sulle regole del Tournefort e del Linneo dal Jussieu e dal Mirbel, come quelli che non proposero leggi nuove, ma commentarono ed ampliarono soltanto quelle proposte dai sopraddetti. Ignoro che botanici de' nostri giorni abbiano pubblicato regole diverse da queste: ma so benissimo che nelle opere fitografiche moderne, alcune delle quali, per molti rispetti, eccellenti, gli autori mostrarono di aver del genere un concetto diverso da quello che risulta dai canoni Linneani. Su questo concetto, che non puossi desumere se non dal modo pratico con cui questi autori caratterizzano i loro generi, non avendone essi pubblicata nè una diversa definizione, nè anco le norme teoriche che seguirono nell'adottarli, c'intratterremo all'atto di classificare le varie sorte di generi, e di apprezzarne il relativo valore.

Il Tournefort stabilì, le note proprie de' generi doversi ritrarre dal fiore insieme e dal frutto, dimostrando non bastar l'uno senza

dell'altro. Questa regola non è abbastanza vera e sicura, essendovi generi ben distinti tra loro pel solo fiore, come il *Centranthus* dalla *Valeriana,* la *Celsia* dal *Verbascum,* la *Primula* dall'*Androsace,* ed il massimo numero delle Labbiate, le quali ne' frutti loro non presentano sensibile diversità. Altri generi invece non diversificano che pel frutto, come la *Lysimachia* dall'*Anagallis,* l'*Arctostaphylos* dall'*Arbutus*, e generi innumerevoli nella famiglia delle Composte. Il genere quindi può essere fondato anche sui caratteri del solo fiore, o del solo frutto, quando però sieno tratti o dalle parti loro di prima importanza, o quando sieno più d'uno, o almeno sieno in accordo coll'insieme di tutti gli altri caratteri secondarii delle specie congeneri, ch'è ciò che dicesi il portamento. Così il *Centranthus* è buon genere perchè differisce dalla *Valeriana* per due caratteri del fiore, la lunghezza e forma dell'appendice della corolla e la presenza di un solo stame anzichè tre: la *Celsia* dal *Verbascum* pel numero minore, ed insieme pella diversa direzione degli stami: la *Primula* dall'*Androsace* pel tubo della corolla cilindrico e non ovato, ed insieme per la fauce della medesima allargata anzichè contratta, ciocchè accenna ad una diversità di struttura. Quanto al frutto i suoi caratteri hanno certamente un maggior valore di quelli del fiore, ma per ben apprezzarli converrà distinguere quelli desunti dalle parti più essenziali del medesimo, da quelli che si traggono dalle appendici di queste. Dal non aver tenuto conto di tal differenza ne provennero alla scienza generi falsi in gran numero, perchè fondati solamente su queste appendici di minore importanza, quali sono le ali, le coste, il rostro, le code, le chiome, ed il pappo dei semi e dei frutti, in più famiglie e specialmente in quella delle Composte.

Altra regola impostasi dal Tournefort si è quella, che non bastando il fiore ed il frutto alla distinzione de' generi si possa aver ricorso non solo a tutte le altre parti delle piante, sì ancora a quelle proprietà di esse, ch'egli chiama affezioni, modo di crescere, portamento o fisonomia delle medesime. Questa regola ha bisogno d'essere commentata e chiarita. O fra due generi similissimi nel fiore e nel frutto avvi una differenza notevole non solo negli organi accessorii di queste

parti, sì ancora nell'aspetto generale delle specie che li compongono, ed allora sarà debito del botanico il distinguerli l'un dall'altro, onde non riunire insieme due serie d'esseri discordanti, e così comporre un genere troppo artificiale. O fra questi generi similissimi fra di loro in tutte le parti della fruttificazione sì essenziali che accessorie, non avvi altra differenza che quella del portamento, ed allora non sarà lecito su questo carattere unico, vago, arbitrario e non esprimibile con parole, separare in due generi specie fra loro unite in un solo per tanti altri e più importanti caratteri.

Nella terza regola dichiara il Tournefort, doversi stare alle sole note caratteristiche del fiore e frutto quando queste bastino abbondantemente alla distinzione del genere. Però all'atto pratico egli stesso deviò da tal legge soggiungendo a que' primi caratteri altri desunti dalle brattee, dalle foglie, dalla radice, e sino dal portamento per distinguere generi che qualche volta eziandio non ne abbisognavano, come l'*Ammi* dall'*Apium*, il *Phalangium* dall'*Ornithogalum*, il *Limodorum* dall'*Orchis*, ecc. Il celebre Ant. L. Jussieu sostenne col suo autorevole esempio quest'utile deviazione dalla legge del Tournefort accoppiando sempre i caratteri generici tratti dagli organi riproduttori essenziali ad altri ricavati dagli accessorii, ed anche da quelli della vegetazione. Fra' moderni non pochi il seguirono, soggiungendo alla frase generica l'indicazione dell'infiorescenza, o anche d'altri caratteri quando questi sieno comuni a tutte le specie, ciocchè torna utilissimo, perchè nell'atto che nulla toglie alla bontà e perfezione de' caratteri essenzialmente generici, che restano sempre i primi e separati dagli altri, serve a meglio dipingere l'aspetto proprio di tutto il genere, a mostrarne la naturalezza, e ad indicare come le di lui specie sieno fra loro unite non solo pei più importanti ma più minuti caratteri della fruttificazione, sì ancora per quelli men rilevanti in valore ma più spiccati e visibili degli altri organi.

Vuole il Tournefort, che i caratteri proprii si conservino inalterati ed eguali in tutte le specie che lo compongono, e che oltre a ciò si appalesino all'occhio senza bisogno di microscopio. Non può essere posta in dubbio la bontà della prima legge, come quella ch'è pietra

fondamentale del genere. Quanto all'altra vuolsi raccomandare a chi fonda un genere di preferire a parità di circostanze i caratteri più apparenti e visibili a' più minuti e nascosti per non accrescere le difficoltà dello studio senza necessità; ma non si potrebbe escludere dal medesimo l'uso del microscopio semplice, di cui solo potea parlare il Tournefort, onde indagare i piccoli fiori, i piccoli organi ed i minuti caratteri, senza privare il botanico d'un potente soccorso, e la scienza delle innumerevoli e preziose scoperte che ne derivano.

Propone ancora, le piante prive di fiori e frutta, o dell'una di queste parti, e quelle pure il cui fiore e frutto per la piccolezza loro non ponno esser veduti senza il microscopio, doversi ripartire in generi secondo i caratteri d'altre parti più insigni. Questa legge che l'autore applica soltanto alle Crittogame ed Agame non potrebbe seguirsi intieramente nemmen per queste. Gli è vero che in mancanza d'ogni altro organo caratteristico appartenente alla fruttificazione od analogo a questo, si può ricorrere in tali piante ai caratteri d'altre parti, quelle cioè della vegetazione, ma però senza proscrivere l'uso del microscopio; chè anzi in queste piante diventa, non che utile, indispensabile per la ricerca dei caratteri sì generici che specifici, che in molti casi si desumono dalla struttura intima e microscopica delle parti.

Composta la descrizione di un genere, per assicurarsi se tutti i caratteri adoperati sieno necessarii alla diagnosi del medesimo, consiglia da ultimo il Tournefort di escludere in via di prova un dopo l'altro i caratteri stessi, osservando quali di così fatte esclusioni portino di necessità la distruzione del genere, e quali il lascino sussistente, mentre con ciò si verrà a conoscere i caratteri essere nel primo caso essenziali al genere, nel secondo indifferenti e soverchii. Questo esperimento, di cui non vuolsi negare la utilità per la verificazione del valor dei caratteri relativamente ad un dato genere, può farsi ove questi abbondino, ed ove piaccia ristringere la diagnosi generica alle sole note essenziali, anzichè estenderla a tutte quelle che traggonsi dallo studio di tutti gli organi delle piante.

Da questo esame delle leggi create dal fondatore de' generi ri-

sulta, non potersene seguire alcuna senza eccezioni o restrizioni, ma colle avvertenze indicate poter ciascheduna di esse giovare nella formazione ed accettazione dei generi.

Ben d'altra importanza e più preziose e più sicure e più generali sono quelle fissate dal riformatore svedese. Partì il Linneo dal principio ammesso pure dal Tournefort, che tutti i generi sieno naturali, e quindi stanziò *essere tanti i generi quanti sono gli attributi comuni prossimi delle specie distinte, secondo i quali furono i generi creati sin dal principio.* Ritenuto poscia per canone fondamentale, doversene trarre i caratteri dai soli organi della fruttificazione, determinò tali organi essere il calice, la corolla, lo stame, il pistillo, il pericarpio, il seme, il ricettacolo ed il nettario, considerati secondo il loro numero, la figura, la proporzione ed il sito. Del portamento insegnò doverlosi consultare quasi di nascosto, ned anteporlo mai ai caratteri della fruttificazione, come han fatto gli antichi, per non fabbricare falsi generi per lieve causa. Mostrò con esempii, ciò ch'è caratteristico di un genere non esserlo di necessità in un altro. Stabilì la gran legge, che il carattere non forma il genere, ma lo indica, e che quello proviene da questo e non viceversa. Notò nessuna parte della fruttificazione essere egualmente costante in tutti i generi, ma quanto è più costante una data parte di quella in un maggior numero di specie, tanto esser più certa la nota generica che somministra. Avvertì esistere in molti generi una nota caratteristica singolare, la quale ove manchi in alcune specie d'un di que' generi, avvi luogo al sospetto, non forse queste meritino d'esserne separate; e se invece si estenda anche a specie d'altri generi affini, puossi credere che queste ultime meritino per tal carattere d'essere unite ai primi.

Ora esaminando una ad una le fonti de' caratteri generici ammesse da lui, ci dichiarò in generale quelli del fiore essere in parità di circostanze da anteporsi a quelli del frutto specialmente nell'attributo della figura, che trovò più certa nel fiore che nel frutto, per cui prescrisse doversi riunire que' generi, che diversi in questo, convengono in quello. Affermò nessuna parte essere in tutti i generi costantissima, assai variabile il loro numero, men la figura, ancora meno la propor-

zione, più costante d'ogni lor proprietà la situazione reciproca delle parti. Scoprì pel primo l'importanza del nettario, che quasi antepose ad ogni altro organo nella determinazione dei generi, disse meno costanti i petali, più costanti dei petali il calice e gli stami. Tentò da ultimo di provar con esempii come la struttura del pericarpio varii in uno stesso genere, e perciò valga meno che si parrebbe.

Divise i caratteri generici in essenziali, che distinguono un genere dagli altri compresi nello stesso ordine naturale, e ne lodò sopra tutti l'eccellenza, raccomandandone la brevità; in artificiali o fattizii, che lo distinguono da que' soltanto di un dato ordine artificiale; ed in naturali che abbracciano tutte le possibili note generiche, e quindi includono e l'essenziale e il fattizio. Del naturale, ch'egli disse essere la base di tutti i sistemi e di tutti i generi, insegnò per comporlo doversi stendere accuratissima descrizione della fruttificazione intiera di una prima specie per raffrontar con questa tutte le altre specie congeneri, escludendone in seguito mano a mano que' caratteri che non si trovassero comuni a tutte. I caratteri superstiti a questo spoglio formano il carattere generico naturale, perfetto e infallibile, perchè risultante dal consenso di tutte le specie di quel genere in alcune note comuni. Ammise l'uso del microscopio nella ricerca de' caratteri: ripudiò invece da questi la infiorescenza, che qualificò dannosissima nella costruzione de' generi.

Ripassando ora in esame queste leggi da Linneo proposte a' botanici, e appoggiate sempre a moltiplici esempii tratti da' varii generi delle piante, gli è forza il convenire nella eccellenza ed utilità della massima parte delle medesime, perchè desunte da un numero di osservazioni quasi incredibili in un sol uomo, e perchè provate al crogiuolo della esperienza fattane nella fondazione dei caratteri di più che mille trecento generi. Tre sole di queste non ottennero l'assentimento dei botanici, l'una che afferma essere tutti i generi naturali; l'altra che attribuisce maggior valore ai caratteri del fiore, e in particolarità del nettario, che non a quelli del frutto; la terza che rifiuta i caratteri dell'infiorescenza come generici.

Non si vuol negare esservi alcuni generi composti di specie tal-

mente simili tra di loro, da non potersi dividere l'una dall'altra senza violentar la natura, come i Ranuncoli, i Delfinii, gli Aconiti, le Rose, i Garofani, le Ossalidi, e molti altri. Ma ve ne sono ancora, e in numero assai maggiore, le cui specie non hanno fra di loro una sì evidente somiglianza di portamento da farle tosto riconoscere per congeneri. Sono elleno unite per caratteri meno apparenti, benchè importantissimi, e formano un'associazione generica giusta e buona, ma non naturale, nel senso almeno propostosi dal Linneo. Tutti que' generi, sulla conservazione o sulla suddivisione de' quali son discordi i botanici, secondo che apprezzano più o meno il valore dei caratteri discrepanti, non sono certamente generi naturali, cioè composti di specie evidentemente fra loro simili, ma artificiali, perchè dipendenti dalle opinioni degli uomini. Però sarebbe vivamente a desiderarsi che tutti i generi fossero naturali, e che gli studii di tutti i botanici si volgessero a questa importantissima opera di una accurata rivista e depurazione de' generi dalle specie ambigue che gli oscurano, onde ritenere in essi le sole specie simili, congiunte cioè e pel carattere e pel portamento, ed escluderne le discordanti, per raccorle poscia o nei generi affini o in nuovi generi secondo che i caratteri che vi si scoprissero giustificassero l'uno o l'altro partito. Malgrado ciò resterebbero, il so, molte specie incerte, quelle che intermedie a più generi e discordando in alcun che da ciascuno di essi, rendono incerti i limiti dei medesimi, non possono essere collocate esattamente in alcuno, nè presentano caratteri sufficienti a comporne di nuovi. Or queste specie anomale sarebbe forse più utile il raccorle insieme alla fine di quel genere, cui più s'accostano, come si suol fare dei generi anomali per le famiglie, e delle famiglie anomale per le classi, indicandone le differenze, e così additandole ai successivi studii de' fitografi, anzichè mescolarle alle vere specie di un dato genere da cui dissentono, rendendo con ciò o non universale, o troppo artificiale il carattere del medesimo.

Riguardo all'altra regola Linneana, essere i caratteri del fiore, e specialmente del nettario più costanti che que' del frutto, nella generalità de' casi essa non regge all'osservazione, nè potrebbesi ammet-

tere in assoluto. La sola figura sì nell'un che nell'altro non è carattere da bastar solo alla distinzione dei generi, ma la struttura del frutto, salve eccezioni speciali, sorpassa d'assai in valore quella delle altre parti. Tutti i moderni convengono in tal sentenza, e degli esempii stessi recati dal Linneo per provare la incostanza del frutto in un medesimo genere, non ne restano oggidì che pochissimi, i quali da' botanici posteriori non sieno stati, secondo la forma varia del pericarpio, ripartiti in diversi generi. Così la *Pavia* uniloculare fu separata di genere dall'*Aesculus* triloculare, il *Nelumbium* a frutto forato all'apice dalla *Nymphaea* imperforata, la *Valerianella* a frutto calvo dalla *Valeriana* papposa, il *Paliurus* a frutto samaroideo dal *Rhamnus* baccato, l'*Onobrychis* a legume con un sol seme dall'*Hedysarum* polispermo, e per tacere degli altri, infiniti generi delle Ombrellifere e delle Composte furono divisi in altri generi fra loro distinti pel solo frutto, benchè similissimi nelle altre parti. E qui giova osservare, che il Linneo stesso, avvedutosi poscia della troppa latitudine di questa legge, non dubitò di deviarne in alcun caso ei medesimo, e siane esempio il genere *Trollius* da lui citato prima fra i falsi generi, perchè distinto dall'*Helleborus* pel solo frutto, che più tardi non si rimase dall'adottare per quello stesso carattere, che aveva pria rifiutato.

Un'altra massima del Linneo, che i moderni riprovano, si è quella che esclude la infiorescenza dalle fonti dei caratteri generici, e la reputa anzi dannosissima alla costruzione dei buoni generi. Si ritiene ora con più ragione, che la infiorescenza sola non possa per sè bastare alla creazione di un genere; ma che, in mancanza di caratteri più importanti, si possa anche ad essa ricorrere per distinguere generi, che contemporaneamente sieno diversi per qualche altro carattere secondario della fruttificazione, ed insieme pel portamento. Su tutte le altre leggi dal Linneo fissate riguardo ai generi, i botanici tutti consentono nell'ammetterle, o almeno non ne hanno ch'io sappia apertamente impugnata la verità, benchè spesso col fatto se ne discostino. Il celebre Anton Lorenzo Jussieu fece al Linneo il rimprovero d'aver limitato le fonti dei caratteri generici alle sole parti del fiore e frutto, e di non aver rilevata l'ineguaglianza di valore e di dignità

esistente fra i varii caratteri tratti da queste parti. Se non vuolsi contrastare al Jussieu, che anche le parti accessorie della fruttificazione possono in alcun caso somministrare note differenziali ad alcuni generi, per cui la regola Linneana non può sempre seguirsi, come abbiamo riconosciuto testè, è di giustizia però il ribattere l'altra accusa data al Linneo di non aver distinto il vario grado nel valor dei caratteri, come contraria al fatto. Il Linneo non classificò è vero gli organi secondo il vario loro valore caratteristico, ciocchè non può farsi rigorosamente neanco oggidì, e molto meno poteva esser fatto al suo tempo, in cui l'importanza degli organi, e il valor dei caratteri cominciava appena a conoscersi; ma però indicò egli il valore comparativo degli attributi di ciascun organo, preponendo a tutti la situazione relativa dei medesimi, e chiaramente affermando essere in essi il numero più variabile della figura, la proporzione più certa di questa, meno certa del sito. Degli organi stessi rilevò l'importanza in parecchi, dichiarando gli stami e il calice men variabili e più certi dei petali, il nettario più caratteristico del frutto stesso. Però il Jussieu medesimo malgrado le fatte censure confessò, le regole Linneane esser poco lungi dal vero; non istimò necessario l'aggiungervene alcuna; dichiarò invece i generi del Linneo ammissibili nel maggior numero, pochi da riprovarsi. Solo credè opportuno di far succedere sull'esempio del Tournefort in ciascun genere ai caratteri tratti dal fiore e frutto quelli che sono accessorii a questi, od anche spettano agli organi vegetativi, quando però sono comuni all'intero genere, e sempre considerandoli come caratteri secondarii, atti solo a facilitarne la conoscenza col porre in vista tutte l'esterne apparenze delle sue specie.

Il De Candolle ammise tre regole fondamentali alla formazione dei generi. L'una si è la gran regola Linneana che il carattere non fa il genere, egregiamente da lui commentata dicendo, non bastare a formare un genere, che un dato carattere del fiore o frutto distingua una o più specie da quelle che lor somigliano; ma essere d'uopo altresì che queste piante e si distinguano dalle altre, e si somiglino fra di loro nel portamento. Delle due leggi da lui proposte, l'una

dichiara doversi i generi stabilire sopra caratteri, che raffrontati fra loro sieno sensibilmente d'egual valore; perlochè, soggiunge egli, allorquando in una famiglia un qualunque carattere avrà servito a dividere alcuni generi, esso dovrà serbar sempre nella medesima lo stesso grado di importanza, cioè sarà mestieri secondo le circostanze, o riunire i generi separati per tal carattere, s'esso sarà stato riconosciuto fallace; o separare le specie fornite di un tal carattere da que' generi che non l'hanno, se il carattere sarà stato riconosciuto costante in quella famiglia. E qui l'autore cita l'esempio del pappo a peli piumosi o semplici, il quale essendo stato ammesso da tutti i botanici per distinguere i generi delle Composte, dee servire a distinguere anche altri generi di tal famiglia che differiscano fra di loro per tal carattere. Questa regola, a cui l'autore stesso ha trovato necessario il soggiungere alcune limitazioni, non può essere seguita con sicurezza in tutti i casi. A chi ha studiato i caratteri generici sulle piante è ovvia l'osservazione, che anche nella stessa famiglia lo stesso carattere può variare non solo ne' sottordini, sì ancora ne' diversi generi della stessa. Ciò specialmente si avvera rispetto a quegli organi, che non sono di prima importanza, ma sono appendici o del pericarpio o del seme, quindi organi tutt'affatto accessorii, a' quali è ingiusto il dare l'importanza dei primi. E seguendo l'esempio stesso del pappo offertoci dal De Candolle, non è difficile il dimostrare come l'abuso fatto de' suoi caratteri abbia imbrattato di falsi generi la famiglia delle Composte, lo che ci riserbiamo di rilevare quando passeremo in esame alcuni generi della medesima. Or basti l'aver notato, che la regola qui fondata dal De Candolle posta assolutamente com'è, non regge all'osservazione, e può indurre in errore.

Altra regola, che quest'illustre botanico dichiara essenziale, si è la seguente. Quando in un dato ordine esiste un genere assai distinto pei caratteri e pel portamento, questo genere dev'essere conservato intatto anche se alcune delle sue specie presentassero dei caratteri da poterlo dividere. Ma se dietro indagini più sottili si giugnesse a scoprire, che questo genere non appartiene veramente alla famiglia in cui era compreso, ma deve formarne una egli stesso, allora le sue di-

visioni o sezioni divengono altrettanti generi. La prima parte di questa legge otterrà il suffragio di tutti quelli che amano conservati i veri generi naturali, ed è in accordo colle regole Linneane, e coll'esempio de' botanici più autorevoli. La seconda parte invece non può essere ammessa per alcun conto. Difatti o le sezioni del vecchio genere erano già distinte fra loro per que' caratteri che bastar possono per consenso di tutti alla fondazione de' generi, ed allora meritavano di essere innalzate alla dignità di questi anche prima: o quelle sezioni non aveano tali caratteri, e non vi furono scoperti nè anche dopo che il genere fu fatto tipo di un nuovo ordine, e allora nessuna considerazione secondaria deve indurre il botanico a violare i canoni fondamentali dei generi per innalzare le sezioni ad una dignità, che non meritano. Se ad alcuno venisse fatto di trovar ne' *Rumex*, o ne' Poligoni, o nelle Piantaggini tali caratteri da far d'ognuno di questi generi una famiglia distinta, non ne verrebbe perciò che le sezioni *Acetosa* e *Lapathum* del primo, *Bistorta, Persicaria, Centinodia, Tiniaria*, e *Fagopyrum* del secondo, *Plantago, Coronopus* e *Psyllium* del terzo debbano costituire altrettanti generi; perchè i caratteri di queste sezioni nè furono sino ad ora, nè potrebbero divenire mai caratteri veramente generici. Nè l'esempio addotto dal De Candolle delle divisioni del genere *Diosma* fatte dal Wendland prova punto la convenienza di questa legge; giacchè i caratteri di quelle divisioni aveano già in sè un valore generico indipendente dalla circostanza, che il genere *Diosma* fosse innalzato ad ordine. Tanto è ciò vero che furono elleno già costituite in altrettanti distinti generi, anche senza che si fondasse un tal ordine.

A queste leggi aggiunse il De Candolle due avvertenze assai utili a guidare il botanico nella formazione e nell'accettazione de' generi. L'una di esse insegna, che quantunque il genere possa constare di una sola specie, pure gli è più sicuro quel genere ch'è composto di molte, perchè la concordanza di molte specie in uno o più caratteri generici è prova del valore di questi, oltrechè in un tal genere il carattere può essere aiutato e confermato dal portamento simile di più specie, lo che manca sempre nei generi che contano una specie

sola. L'altra avvertenza del De Candolle sta in ciò, che in que' casi, ne' quali è dubbio il carattere distintivo di un nuovo genere, è più cauto il lasciar la specie nel vecchio genere dov'era prima, anzichè separarnela per caratteri d'incerto valore.

Altro illustre botanico il Mirbel ne' suoi *Elementi di Fisiologia vegetale* e di *Botanica*, dopo di aver definito il genere un'associazione di specie riunite o concatenate fra loro per analogie di struttura e di forma, dopo di aver dichiarato non esser tutti i generi naturali, perchè molti di essi fondati arbitrariamente dai botanici secondo la varia importanza che questi assegnano ai diversi caratteri, dopo di aver provato non potersi escludere nelle stesse Fenogame dalle fonti dei caratteri generici gli organi accessorii del fiore e frutto, e segnatamente la infiorescenza, mentre nelle Crittogame è mestieri ricorrere a caratteri ancora inferiori, venne a distinguere tre sorta di generi. Sono eglino: 1. quei generi ch'ei nomina *sistematici*, i quali non si discostano dagli affini che per un solo carattere riprodotto esattamente in ciascuna specie, quello stesso che Linneo chiamò *nota singolare*, e *carattere essenziale*, quale il genere *Salvia* distinto da tutti pel singolar carattere del connettivo sottile e lungo della antera portato in bilico dal filamento: 2. i generi *concatenati* o a molti tipi, che son composti di specie fra loro strettamente unite per gradazioni insensibili di uno o più caratteri, e questi generi non hanno caratteri distintivi, non hanno limiti certi, nè sono sovente suscettivi d'essere migliorati, come i generi *Melissa*, *Thymus* ed altri: 3. i generi *in gruppo* o ad un sol tipo, che sono più naturali e migliori di tutti gli altri, perchè costituiti da specie legate insieme per molti caratteri, i quali si ripetono in ognuna di esse con modificazioni sì lievi da bastare al botanico lo studio fattone sopra un solo individuo per avere nozioni esatte sopra tutte le specie che compongono uno di tali generi.

Da ultimo il chiar. Alfonso De Candolle nella sua *Introduzione allo studio della Botanica* trattò più estesamente di tutti della importanza relativa degli organi, de' varii aspetti sotto cui questi possono essere considerati, e della importanza relativa di tali diversi aspetti. Sono eglino, la esistenza o la mancanza degli organi, la posizione, la conti-

nuità o l'articolazione, le aderenze, il numero, la dimensione, la forma e l'uso. Disse poi dei caratteri e del loro valore relativo. Quanto ai diversi aspetti di considerare gli organi, ossia di ciò che Linneo chiama i loro attributi, stabilisce superiore a tutti la loro esistenza o mancanza, indi negli organi elementari la forma, in tutti gli altri la posizione relativa. Quanto ai rimanenti, che riconosce non essenziali, avverte l'importanza loro crescere a misura delle attinenze e legami che presentano con altri più o meno numerosi ed importanti. Si occupa infine del valore dei caratteri, che tenta di porre in serie: però s'avvede ei medesimo non avere questa ancora la necessaria esattezza; anzi la dichiara impossibile ad ottenersi, almen quanto ai caratteri secondarii, nello stato attuale della scienza.

Sono queste, se non tutte, almeno le più note ed accreditate dottrine pubblicate finora intorno ai generi ed ai loro caratteri. Una giudiziosa scelta delle medesime, ed alcune modificazioni e schiarimenti secondo le considerazioni fatte sopra alcune di quelle, potrebbero servir di norma ai botanici nella fondazione ed accettazione dei generi. Gli è perciò, ch'io mi propongo ora di epilogarle e comentarle in forma di regole componenti il codice della scienza in cosiffatto argomento. Innanzi a tutto però gli è necessario fermare l'idea vera e sola del genere, senza di cui a nulla varrebbero quelle leggi, perchè da quella sola unità di concetto puossi sperare in botanica quella concordia di opinioni nella formazione ed accettazione dei generi, la cui mancanza è causa principalissima del lamentato disordine nella nomenclatura.

1. I generi sono associazioni di specie unite insieme per uno o più caratteri comuni e costanti tratti dagli organi tutti del fiore e frutto nonchè dalla disposizione dei fiori nelle piante Fenogame, da quelli della organizzazione generale e dalle parti riproduttrici od analoghe a queste nelle Crittogame.

Nota. Nell'assegnare la nota ai generi, ossia nel comporre ciò che chiamano la diagnosi dei medesimi, si darà sempre la preferenza ai caratteri degli organi essenziali, che sono il calice, la corolla, il nettario, gli stami, il pistillo, il frutto, il seme ed il ricettacolo. Solo in

mancanza di questi si potrà ricorrere agli accessorii, quali sono le brattee, ed alla infiorescenza; cioè quando i primi non bastino a differenziare generi di lor natura distinti almeno pel portamento. Così l'infiorescenza a capolino, e le brattee inferiori a questo foggiate a guaina, diversificano a sufficienza l'*Armeria* dalla *Statice*, che ha i fiori in corimbo o in pannocchia, ed è priva di tal maniera di brattee: la presenza di un involucello di molte setole distingue la *Setaria* dal *Panicum* che ne manca; perchè contemporaneamente i caratteri del portamento e riuniscono tutte le *Armeria* fra loro, e le dividono dalle *Statice*; come del pari affratellano le *Setaria* e le allontanano dai *Panicum*. Ai caratteri sopraddetti tratti dagli organi riproduttori sarà utile il soggiungere, separatamente da quelli, anche i caratteri degli organi della vegetazione, che sieno comuni alle specie tutte del genere, perchè aiutano meglio a conoscerlo, e provano la naturalezza dell'associazione che lo compone, e ciò specialmente quando si tratti di fondare un novello genere. Quanto poi alle piante Crittogame, oltre i caratteri tratti dalle parti riproduttrici od analoghe a queste, spesso negli ultimi ordini è necessario, in mancanza di altri caratteri, ricorrere anche a quelli della struttura, della consistenza, della natura ed altre qualità delle parti vegetative per trovarvi le differenze de' varii generi.

2. Due sorta di buoni generi ammettono più concordemente i botanici, quelli che si fondano sopra un solo carattere essenziale e comune a tutte le specie, detti dal Mirbel *sistematici*, e quelli che si fondano sopra molti caratteri, e sono generi più o men naturali.

Nota. I primi sono tanto rari quanto sono rare le note singolari dei generi: i secondi sono migliori di tutti perchè facili a riconoscersi, e legati insieme da moltitudine di somiglianze e di struttura e di forma. Avvi una terza sorta di generi, indicata già dal Mirbel, e seguíta assai dai recenti, che raccoglie quelle specie, che non presentano nel loro insieme un carattere comune preciso e cospicuo, ma che si legano fra di loro per piccole gradazioni e passaggi di più caratteri di secondario valore. Sono siffatti generi i peggiori di tutti, perchè non presentando un carattere eminente e preciso lasciano sempre incerto

il botanico e sul valore del legame che ne unisce le specie, e su quello della differenza che le separa da' generi più vicini. È d'uopo conoscere tutte le specie che lo compongono per formarsene una qualche idea, e questa ancora per lo più riesce vaga ed incerta. Pure nello stato presente delle nostre cognizioni alcuna volta gli è forza tollerarli, considerandoli però soltanto come aggregazioni artificiali e temporarie di specie ambigue, lo studio accurato delle quali è vivamente a raccomandarsi ai fitografi, perchè scoprendovi quando che sia note generiche più precise ed universali, aiutino a disporle un giorno in generi più naturali e meglio determinati. Ma è d'uopo insieme che quelli, la cui voce è autorevole nella scienza, inculchino efficacemente a' botanici troppo proclivi a siffatti generi di non ricorrere a questo tristo spediente, che ne' casi d'inevitabile necessità, e per le sole specie che sono nella condizione sopra notata. La smania di dividere e frastagliare i generi vecchi in altri contrassegnati da caratteri di secondaria importanza, ha privato la scienza dei caratteri precisi ed universali che dipingevano in pochi tratti l'aspetto intero dei vecchi generi, senza sostituirvene altri d'egual valore pei nuovi. Gli è perciò, che questi non potendo essere indicati dal carattere antico, perchè diventato promiscuo a molti, ned essendo abbastanza diversificati fra loro pei caratteri novellamente imposti ai medesimi perchè leggeri, e quindi mutabili, e gradatamente decrescenti in valore nelle diverse specie, restano sempre indeterminati ed incerti. Da ciò ne seguita, che anche raffrontandoli co' vicini non se ne rileva quella pronta e spiccata diversità, che è tanto necessaria per determinare facilmente e sicuramente una pianta; locchè quanto danno porti alla precisione e nettezza delle cognizioni, e quanto ne difficulti l'acquisto, niuno è che nol vegga.

3. Il genere tanto più è naturale quanto più si fonda sopra un maggior numero di caratteri degli organi riproduttori, e quanto più vi concorrono anche quelli degli organi conservatori.

4. Il genere può essere fondato anche sopra un solo carattere comune e costante degli organi riproduttori, quando però vi si aggiungano anche i caratteri del portamento, che uniscano fra di loro le specie che lo compongono, e le distinguano insieme da quelle de' ge-

neri ad esso affini: senza il concorso di queste due condizioni non merita esso il nome di genere ma di sezione.

5. Un genere naturale, cioè composto di specie simili fra di loro per moltitudine di analogie, e quindi anche pel portamento generale che ne consegue, non può essere suddiviso in altri generi per un solo carattere discrepante.

Nota. Il solo carattere, dice il Linneo, non fa il genere, senza di che si potrebbero far tanti generi quante sono le specie, non essendovi specie, in cui alcuna parte della fruttificazione non diversifichi in alcun chè da quella delle specie affini. Il vero marchio distintivo de' buoni generi si è l'esser le sue specie somiglianti fra loro non solo in uno o più caratteri della riproduzione, sì ancora nell'insieme della vegetazione, cioè a dire nel portamento. Se in un genere di portamento uniforme alcuni gruppi di specie sembrano separarsi dalle altre per un solo carattere anche importante, o per molti di secondario valore, questo genere non potrà essere spartito in più, perchè quelle specie sono simili è vero fra loro nel portamento, ma non diversificano pel medesimo dalle altre specie di quel genere; e quindi non posseggono tutte le condizioni, alle quali è legata la formazione de' nuovi generi per la regola quarta. Laonde invece di crearne altrettanti generi sarà utilissimo il farne altrettante sezioni del vecchio genere quanti sono i gruppi discrepanti, contrassegnandone ognuna col carattere che le appartiene. Questo eccellente metodo usato già dal Linneo, e non intermesso dappoi dai migliori, rileva e distingue tali caratteri, dà loro quel valore secondario che lor compete e nulla più, lascia nella piena sua forza ed integrità il carattere generico comune e preponderante, e toglie ai fabbricatori de' falsi generi il sol pretesto che adducono per formarli, la millantata utilità di non confondere i gruppi di specie forniti di alcuni caratteri con quelli che ne son privi; non accorgendosi che, così adoperando, essi fanno ben peggio; mentre per non confondere i gruppi fondati sopra caratteri secondarii, confondono e guastano e talor distruggono i generi, che riposano sopra caratteri di ben più alta importanza, e sono associazioni di ben maggior dignità.

6. Un genere tanto è più fermo ne' suoi caratteri quanto è maggiore il numero delle sue specie, nelle quali tutte si ripetano con modificazioni lievissime i caratteri che lo distinguono: può però constare anche d'una specie sola, nel qual caso i suoi caratteri potranno essere modificati ogni qualvolta ne venga scoperta un'altra o più specie. che necessitino questo cangiamento.

Nota. Il numero maggiore delle specie offre il mezzo di riconoscere la costanza ed universalità dei caratteri generici, che si ripetono nelle medesime, e la naturalezza del genere provata dalla uniformità del portamento di queste. Ne' generi di una specie sola, la scoperta di una nuova specie, o di più, può portare la necessità di sopprimere fra le note primitive del genere un qualche carattere, che nel fondarlo sopra la prima specie si era creduto universale e costante, e che invece si è trovato mancare nelle specie scoperte dopo, benchè queste per tutti gli altri caratteri sieno congeneri della prima. Altra volta le nuove specie fanno apprezzar meglio un carattere pria negletto perchè creduto non generale o variabile, oppure sfuggito per l'innanzi alla osservazione del fondatore del genere. In ambi questi casi sorge la necessità di modificare la frase generica primitiva.

7. I soli fonti dei caratteri generici sono gli attributi degli organi indicati nella definizione del genere, fra i quali attributi viene prima di tutti la esistenza primitiva o la mancanza degli organi, poi la loro posizione relativa, indi in ordine variabile, la continuità o l'articolazione, le aderenze loro, le dimensioni relative o la proporzione, la figura ed il numero: nelle Crittogame anche la natura del tessuto, la struttura, la consistenza, il colore.

Nota. Fa d'uopo distinguere col ch. A. De Candolle, quanto alla esistenza degli organi od alla loro mancanza, quella che dipende dalla originaria struttura e disposizione della pianta da quella che proviene da un difetto di sviluppo, abituale alla pianta stessa. In questo secondo caso il carattere è di minor valore, perchè può variare a seconda delle cause eventuali, che potrebbero alcune volte promuovere lo sviluppo summentovato.

8. I caratteri del portamento od aspetto della pianta non bastano

mai soli alla distinzione di un genere; ma spesso servono di scorta al botanico per ispiare e scoprire caratteri di maggiore importanza, i quali in concorso dei primi bastar possono alla retta fondazione di un genere.

9. Nessun organo ha la stessa importanza caratteristica in tutti i generi delle piante, e perciò gli organi non possono secondo questa essere ineccepibilmente classificati in serie lineare ed in modo assoluto.

10. Nessun carattere ha lo stesso valore in tutti i generi: è però più facile ch'esso l'abbia fra quelli ad esso più affini in una stessa famiglia, benchè non si possa *a priori* affermarlo con sicurezza.

11. Non tutte le parti di un organo hanno un egual valore, per cui non tutte servono in pari grado a dar caratteri per la distinzione de' generi.

Nota. Esempii innumerevoli ed ovvii provano la verità delle regole nona e decima. A queste poi vuolsi aggiungere, che quantunque sia probabile o almen più facile che un carattere trovato costante in più generi della stessa famiglia lo sia pure negli altri della medesima, o almen ne' più affini, pure non si potrà servirsene con sicurezza in un dato genere se non dopo di averlo trovato tale in tutte le specie del medesimo; chè solo allora sarà provata dalla osservazione, ch'è l'unica autorità nella scienza, la immutabilità e generalità del carattere. Quanto alla undecima, che insegna, le varie parti di un organo non somministrare caratteri d'egual valore, essa è regola essenzialissima per non fondar falsi generi, come fu fatto, o su piccole e mutabili modificazioni degli organi riproduttori, quali sono le appendici a foggia di piccole ali, che si riscontrano sul pericarpio della *Veronica Crista galli* donde sorse il genere *Diplophyllum*; o il maggior numero dei sepali e petali del *Ranunculus Ficaria*, che bastò a farne il genere *Ficaria*; o più ancora sopra parti del tutto accessorie agli organi riproduttori, come i peli più lunghi negli achenii di alcune *Phlomis*, su' quali si fondò il genere *Eremostachys*; o quegli altri che vestono la sommità delle antere nella *Stipa Calamagrostis*, per cui si creò il genere *Linagrostis*; o sul pappo membranoso o mancante, pel qual solo nè costante

nè universale carattere si lacerò il naturalissimo genere dei *Chrysanthemum* in tre generi, *Chrysanthemum*, *Leucanthemum* e *Pyrethrum*. La massima parte dei falsi generi d'oggidì fatti a spese dei vecchi proviene dall'aver negletta cotesta regola, dall'aver creduto cioè, che tutti i caratteri e tutte le parti del fiore e del frutto bastar possano del pari, ed in tutti i casi, alla fondazione de' generi. Non avvi parte per accessoria ed insignificante che sia, la quale a siffatto scopo non sia stata esplorata con una sottigliezza eccessiva; non avvi carattere il più minuzioso ed inconcludente, al quale non sia stato attribuito un valore incompetente, con vero sperpero di tempo, ed abuso di osservazione e di raziocinio, per cogliere poi questa effimera, ma pure funesta gloria, dello squarciamento de' buoni generi, e della creazione de' generi falsi e arbitrarii. Ciò si proverà con esempii, che si possono moltiplicare a talento, nella rivista che siam per fare dei nuovi generi delle diverse famiglie.

12. Quando in un genere v'è un carattere singolare, comune a più specie, ma non a tutte, avvi ragione di credere, che quelle, che non l'hanno, debbano esserne separate.

13. Quando invece un tal carattere singolare di un genere si estenda anche ad alcune specie dei generi affini, si può sospettare ragionevolmente, che queste per siffatto carattere possano meritare d'essere riunite al primo genere.

14. Quando una o più specie simili fra di loro sieno state dai varii autori riportate a molti e diversi generi, e sussista ancora la controversia sul vero lor genere, si può dubitare ch'esse non appartengano ad alcuno di essi, e meritino invece di formare il tipo di un genere nuovo.

Queste tre ultime avvertenze possono aiutare il botanico a ritrovare il vero genere di alcune specie dubbiose. Nelle due prime, date già da Linneo, la ricerca della nota singolare può condurlo utilmente a riunirle o a separarle di genere, secondo che la posseggono o ne son prive. La terza poi è un indizio spesso sicuro della convenienza di fondare un nuovo genere, perchè quando una pianta viene riferita da varii autori a molti e diversi generi, e non fu ancora trovato

quello a cui ella indubitatamente appartiene, ciò significa ch'essa o non ha qualchedano dei caratteri proprii di ognuno di que' singoli generi, o ne ha invece di quelli che in que' generi non s'incontrano: in ambi i quali casi può sorgere il bisogno di creare per essa un novello genere, purchè ella presenti le altre condizioni ritenute necessarie a tal uopo. Tale si è il caso della *Matricaria inodora* del Linneo riferita successivamente ai generi *Matricaria, Chrysanthemum, Pyrethrum, Chamomilla*, e non appartenente con esattezza ad alcuno, per la quale ho creduto di fondare il genere *Chamaemelum*, ch'è distinto dai precedenti per i caratteri del frutto, e per il portamento. All'opposto non si può conservare il genere *Aetheorhiza* fondato dal Cassini sopra la *Crepis bulbosa*, benchè questa sia stata successivamente riportata ai generi *Hieracium*. *Leontodon, Prenanthes, Taraxacum, Crepis*, perchè diversifica da quest'ultimo per un solo e leggero carattere, e quindi manca delle qualifiche necessarie a formarne un genere.

Sono queste le regole che possono credersi sufficienti alla retta fondazione e sicura accettazione dei generi. Osservazioni posteriori potranno forse accrescerle, forse modificarle, annientarle non mai, perchè desunte dallo studio dei caratteri di tutte le piante sino ad ora scoperte, intrapreso già dal fondatore dei generi, e continuato dai più insigni botanici del passato e del presente secolo. Raccolte e commentate siffatte leggi, resta ora, che colla scorta di esse ripassiamo in esame alcuni de' nuovi generi, lo che servirà insieme a provare l'esattezza e la verità delle medesime, e l'insussistenza ed erroneità de' generi che si fondarono in onta ad esse. E perchè gli è pur d'uopo l'assegnar limiti ad un lavoro, che potrebbe estendersi a tutti gli ordini delle piante, ci limiteremo ora a rivederne soltanto alcuni delle Dipsacee, delle Composte, delle Campanulacee e delle Scrofularine, ristringendoci ancora alle sole piante europee, che appartengono a queste famiglie.

Nelle Dipsacee il genere Linneano *Scabiosa* fu ripartito dai moderni, sulle traccie in parte del Vaillant, nei generi *Succisa*, *Cephalaria, Asterocephalus, Pterocephalus* e *Scabiosa*, malgrado la somiglianza del portamento che dà un aspetto comune a tutte le specie del vecchio genere.

Ma considerazioni di maggior peso che il portamento indussero i botanici ad adottarne la divisione. Il ricettacolo senza brattee presentò un carattere importante e preciso per separare le Scabiose vere da tutte le altre, che l'han fornito di brattee. A questo s'aggiunse l'involucello del frutto compresso in quelle, e non tetragono come nella *Succisa* e nella *Cephalaria*, nè rotondo come negli *Asterocephalus*, nè ottagono come nei *Pterocephalus*; nonchè la corolla quadrifida (com' è nella *Succisa*, dalla quale poi differisce pel ricettacolo nudo e pell' involucello compresso), e non quinquefida come in tutti gli altri generi sopra detti. La *Cephalaria* differisce, oltrechè dalla *Scabiosa*, dagli altri generi affini per l' involucro coriaceo squamoso ed embriciato, ed oltre a ciò dagli *Asterocephalus* e *Pterocephalus* per la corolla quadrifida e non quinquefida, dalla *Succisa* pel lembo del calice ruotato e non concavo, per l'involucello liscio e non segnato da otto solcature. L'*Asterocephalus* differisce da tutti i generi affini, meno che il *Pterocephalus*, per la corolla quinquefida, oltre i caratteri testè indicati come differenziali di ciascun genere: dal *Pterocephalus* poi per avere nel calice cinque setole e queste scabre, non molte e piumose, nonchè l'involucello rotondo e non ottagono. Il *Pterocephalus* infine diversifica per questi caratteri dall'*Asterocephalus*, e per gli altri sopra notati dagli altri generi. Questo succinto esame dei cinque generi, in cui furono ripartite le Scabiose del Linneo, fa conoscere come ciascun di essi si fondi sopra più di un carattere degli organi riproduttori, e particolarmente del ricettacolo, del calice e dell'involucro, e quindi abbia i requisiti assegnati al genere, ned abbisogni del carattere della dissomiglianza nel portamento delle sue specie da quelle che vi erano prima unite, perchè in caratteri più essenziali, che non è questo, presenta già la prescritta diversità. Tali generi sono quindi da conservarsi.

Nelle Composte il genere *Cnicus* è ben distinto dalle Centauree per avere un pappo triplice, il più esterno de' quali è corneo, e pegli achenii solcati e non lisci. La *Crupina* diversifica dalle Centauree per avere, in luogo d'uno, due pappi, e per esser questi di natura diversa. Il carattere dell'areola che occupa il centro della base del frutto non è costante, perchè nella *Centaurea Crupinastrum*, che pure è congenere

della *Crupina*, l'areola è laterale alla base stessa come nella *Centaurea*. Il *Cirsium* invece non si distingue dai *Carduus* che per le setole del pappo semplicemente scabre anzichè piumose. Non bastando un sol carattere per separare di genere specie simili fra di loro per moltitudine di rapporti, e tale essendo il caso dei Cirsii rispetto ai Cardi, il genere *Cirsium* non può essere conservato, ma deve considerarsi quale sezione del genere *Carduus*, restituendo così la primitiva integrità a questo genere naturalissimo. Il genere *Pycnomon*, dal Cassini fondato sul *Carduus Acarna*, non differisce dai *Cirsium*, e quindi nè anche dai *Carduus*, che pegli stimmi liberi e non riuniti fra loro, e per un nettario a cinque raggi sorgente dalla sommità dell'achenio. Questo secondo carattere non è esclusivo del genere, perchè trovasi già nei *Carduus pycnocephalus, C. acicularis, C. collinus;* e il solo carattere, che rimane, non può bastare a fondare un genere: perciò più a ragione dovrà essere questa pianta ritornata ai *Carduus* collocandola nella sezione dei *Cirsium*.

Il genere *Tripolium* del Cassini, ritenuto pur dai moderni, dicesi differire dagli *Aster*, perchè l'involucro del fiore è composto di due serie di brattee anzichè di parecchie. Ma questo solo carattere non basterebbe già a separarlo dal vecchio genere, cui è legato per somiglianza strettissima di portamento, anche se fosse preciso, che non lo è. Di fatti anche il *Tripolium* presenta più serie di brattee nell'involucro, ma esse in luogo di essere ravvicinate fra loro intorno al capitolo, come negli *Aster*, sono più rimote, più sparse, e cominciano già presso alla sommità del peduncolo; per cui tutta la differenza generica consisterebbe nella maggiore o minore prossimità reciproca delle brattee.

Il genere *Linosyris* del Cassini, che anche i recenti conservano, dicesi diverso dalla *Chrysocoma* per l'involucro fogliaceo, e le setole del pappo più numerose e disposte in due serie. Ma il primo carattere se scorgesi evidente nella *Linosyris vulgaris*, non lo è più nella *L. villosa*, e quindi non è generico: e le setole del pappo se pur sono più numerose che nella *Chrysocoma* (e questa piccola e non determinata differenza di numero non basta certo a fondare un genere), non

formano nemmen nella *Linosyris* le due serie evidentemente distinte, che gli autori descrivono. Il ricettacolo poi è alveolato con alveoli marginati sì nella *Linosyris* che in qualche *Chrysocoma* (p. e. nella *Chr. Coma aurea*) e perciò non vale a distinguerle.

Il naturalissimo genere dei Gnafalii europei venne spartito in tre dai moderni, in *Gnaphalium*, *Leontopodium* ed *Antennaria*. Il primo presenta il pappo sì del disco che del raggio composto di setole filiformi, ed è monoico; il secondo lo è al pari, ma le setole degli achenii del disco sono un po' ingrossate e dentellate nell'apice. Chi può credere che su questa unica e futile differenza siasi potuto fondare un genere? Il terzo *Antennaria* ha per sè due caratteri, l'esser dioico, ed avere il pappo della pianta feminea fertile formato di setole filiformi, mentre in quello della pianta ermafrodita sterile queste son dilatate in cima come le antenne degli insetti. A provar l'erroneità dell'*Antennaria* fondata su così lievi caratteri, in onta del portamento, basterà osservare, che di due specie fra loro similissime tanto, da essere state sempre scambiate l'una coll'altra anche dallo stesso Gaertner che fabbricò questo genere, quali sono il *Gnaphalium alpinum*, e il *Gnaphalium carpathicum*, la prima di queste resta ai *Gnaphalium*; l'altra invece appartiene all'*Antennaria*. Così adoperando non si avranno mai certamente veri generi naturali, perchè non solo non se ne fanno di nuovi, che meritino questo nome, ma si distruggono anche quelli che sussistevano.

Invece parecchi moderni sopprimono il genere *Filago*, le cui specie riuniscono ai *Gnaphalium*; certo a gran torto, perchè quello differisce egregiamente da questo pel ricettacolo lineare, allungato e fornito di pagliette, che nell'altro è piano ed affatto nudo.

Le Achillee furono smembrate in due generi, l'uno de' quali chiamato *Ptarmica*, l'altro *Achillea*. A separarnele si trovò sufficiente il numero de' fiori del raggio di ciascun capitolo, i quali nella prima spesso (nè sempre) arrivano a sette, mentre nell'altra sono cinque, e la lunghezza del raggio un po' maggiore nel primo che nel secondo. La natura già di tai caratteri inconcludenti e mutabili, per cui appena bastano a distinguere le Achillee in due sezioni, era tale da farne ri-

provare lo smembramento generico, anche prima ch'io scoprissi nel monte Orien, che separa la Dalmazia dal Montenero, una specie, che in sè riunisce i caratteri d'ambedue questi generi, e perciò ne prova l'identità. Diffatti in questa, ch'è l'*Achillea abrotanoides*, trovasi il margine oscuro delle squame dell'involucro (che però varia anche di color verde), il numero maggiore de' fiori del raggio (che pure varia in essa da 5 a 7) e la maggior lunghezza del raggio stesso, caratteri assegnati al genere *Ptarmica* dai moderni, insieme colla piccolezza de' capitoli, e quindi ancora del ricettacolo, riservata dai medesimi alle vere Achillee.

Nella tribù delle Crisantemee ho osservato mutabile la presenza, la grandezza e la forma del pappo non solo ne' generi, sì ancora nelle specie. Nel volgarissimo *Chrysanthemum Leucanthemum*, e nella non men volgare *Matricaria Chamomilla* è facile il riconoscere la fallacia di tal carattere, mentre e nello stesso individuo, e qualche volta ancora nello stesso capitolo, il pappo in alcuni achenii manca affatto, in altri è appena in rudimento, in altri non è che incompleto, in altri è completo ma breve, in altri è più sviluppato ma imbutiforme, in altri sviluppatissimo, ampio e campanulato. I varii generi perciò di questa tribù, che fondati sono su questo solo carattere, nè si distinguono per altro dai loro affini, debbono essere cancellati. Tali sono fra gli indigeni il *Leucanthemum* del De Candolle, il *Phalacrodiscus* del Lessing, il *Pyrethrum* del Gaertner, lo *Xanthophthalmum*, il *Gastrosulum* o *Gastrosylum* ed il *Tripleurospermum* dello Schultz, i quali due ultimi non in altro son diversi fra loro che nel pappo bilobo in quello, intero in questo.

All'opposto parmi essere ben distinto il nuovo genere *Chamaemelum* da me proposto, il di cui tipo è la *Matricaria inodora* del Linneo, perchè diverso da tutti i varii generi cui fu riferito, cioè dalla *Matricaria* pel ricettacolo pieno e non vacuo, e gli achenii forniti di tre coste, e di una o due grosse ghiandole nere; dai Crisantemi e dai Piretri, pelle corolle cilindriche e non compresse alla base, e pelle ghiandole sopra dette. A questi caratteri si unisce quello del portamento ch'è tanto simile negli organi vegetativi delle specie *Ch. ino-*

dorum, Ch. uniglandulosum, Ch. praecox, Ch. maritimum, Ch. discoideum, Ch. disciforme, Ch. confusum che sinor lo compongono, da potersi elleno assai difficilmente distinguere pei caratteri dei medesimi, per cui s'è dovuto ricorrere a' caratteri degli achenii.

Nelle Cicoriacee fu data troppa importanza alla lunghezza del rostro ne' loro frutti. Perciò furono divise dalle Seriole la *S. aetnensis* e *S. cretensis*, facendone il genere *Metabasis* fondato sulla brevità o sulla mancanza del rostro negli achenii del margine, che nelle Seriole vere si dicono lungamente rostrati. Ma questo carattere, anche se fosse di qualche importanza, non è esclusivo del nuovo genere, giacchè anche in alcune Seriole (*S. laevigata*) gli achenii tutti hanno un rostro o brevissimo o nullo. Non resta adunque altro carattere per distinguere il nuovo genere che il pappo dei fiori del margine diverso da quello dei fiori centrali, il qual carattere ed è solo ed è mutabile, perchè dipendente dalla circostanza eventuale che gli achenii del margine abortiscano o no, nel qual primo caso (ch'è il più comune ma non il solo) il pappo di quelli diversifica dai centrali, mentre nell'altro non presenta diversità.

Nei *Leontodon* del Jussieu si volle separar di genere il *Leontodon hispanicum* dal *Leontodon saxatile* facendone il genere *Asterothrix*, mentr'esso non ne differisce nemmeno di specie, fondandone la distinzione sopra il rostro degli achenii più o meno lunghi, la base delle setole larga od angusta, le setole stesse o tutte piumose, o le esterne scabre. Lo studio attento del frutto e del pappo nei *Leontodon*, uniti insieme intimamente dal portamento, mostra evidentemente, che varia nelle diverse specie la lunghezza del rostro senza che vi sieno limiti sì precisi ed esatti fra il lungo ed il breve, come si vorrebbe perchè se ne potesse trarre un carattere, e che la base delle setole varia pure nelle medesime ora larga, or angusta. Difatti elleno son tutte larghe alla base nel *Leontodon autumnale;* lineari le esterne, dilatate le interne nel *L. hastile;* tutte lineari nel *L. saxatile*; strette le esterne, e dalla base sino all'apice gradatamente attenuate le interne nel *L. incanus*, il quale perciò presenta il passaggio delle setole larghe alla sola base, che son proprie del *Leontodon*, a quelle tutte affatto lineari del-

l' *Asterothrix*, e unisce incontrastabilmente insieme questi due generi. La stessa variabilità si osserva pure nei peli delle setole componenti il lor pappo, le quali nel *L. autumnale* e *L. saxatile* son tutte piumose; nel *L. hastile* le esterne scabre, le interne piumose; nel *L. incanus* e nel *L. Berinii* le esterne ora scabre ora sparsamente ed interrottamente pelose, le interne piumose: ciocchè prova all'ultima evidenza la fallacia e la futilità del carattere.

Il genere *Mycelis* del Cassini, ch'è la *Cicerbita* del Wallroth, fondato sulla *Prenanthes muralis* del Linneo, non diversifica dalle Lattuche che per l'involucro fornito alla sola base, anzichè per tutta la sua lunghezza, di piccole brattee, mentre il frutto è affatto eguale in ambedue i generi, che perciò non possono essere separati.

Le *Barkausie* del Moench non si distinguono dalle *Crepis* del Linneo che per avere gli achenii tutti o almeno que' del disco rostrati, mentre in queste sono appena assottigliati all'apice. Il genere naturalissimo delle *Crepis* mostra, meglio che ogni altro, il poco valore del rostro come carattere generico. Lunghissimo nella *Crepis foetida* e nella *C. rubra*, men lungo nelle *C. vesicaria* e *C. setosa*, è brevissimo e talor manca affatto nella *C. neglecta*, la qual pianta, riportata anche adesso da alcuni alle *Barkausie*, da altri alle *Crepis*, mostra evidentemente l'erroneità del carattere, e la convenienza di sopprimere il nuovo genere fondato sopra il medesimo.

Il genere *Phaenixopus* al contrario sembra ben distinto dalle Lattuche, cui molti seguono a riportarlo pel doppio carattere dei fiori disposti in una sola serie nello stesso involucro, anzichè in due o tre serie, e pella natura del rostro ch'è formato dal seme stesso che assottigliasi in punta, e perciò ne serba il colore oscuro, e non già, come avviene nelle Lattuche, dal pericarpio solo che sopra il seme ristringesi improvvisamente in un filo, per cui questo ha color diverso dall'achenio, cioè quello ch'è proprio del pericarpio. A ciò s'aggiunge anche la forma del rostro stesso, ch'è filiforme nelle Lattuche, lanceolato nel *Phaenixopus*.

Alcuni trovano incerti i limiti fra gl'*Hieracium* e le *Crepis*: però i primi si distinguono dalle altre per avere gli achenii egualmente grossi

per tutta la loro lunghezza, e non assottigliati alla cima, per essere coronati all'apice da una piega o da piccoli denticelli, che alle altre mancano, e pel pappo formato da una serie di peli di un color bianco sudicio, e non da molte serie di peli candidi. Tutti questi caratteri bastano certamente a mantenere la distinzione adottata già dal Linneo per que' generi. Per egual ragione il genere *Gatyona* disparesi dalle *Crepis* avendo e l' involucro fruttifero a più angoli alternati da solchi, e gli achenii marginali involti nelle brattee interne dell'involucro, ed a tre coste, di cui la media prolungata in un'ala, mentre quelli del disco hanno coste eguali fra loro; e inoltre per avere un ricettacolo sparso di pagliette simili a lunghi peli; i quali caratteri tutti non s'incontrano nelle altre *Crepis*, da cui fu quindi a ragione separata la *Crepis Dioscoridis* per farne il genere *Gatyona*.

Non è così del genere *Aetheorhiza*, che fondò il Cassini, e alcuni de' moderni conservano, sull'*Hieracium bulbosum* del Willdenow. Non diversifica dalle *Crepis*, e specialmente dalle rostrate, che pegli achenii a quattro o a tre coste, mentre nelle *Crepis* aggiungono sino a dieci. Fu perciò che il Cassini stesso, e il Lessing e il Froelich dopo di lui, riportarono questa pianta alle *Crepis*, da cui non può essere certamente divisa per questo solo e sì meschino carattere.

Le osservazioni sin qui istituite intorno al rostro, al pappo, ed al numero delle coste dei frutti in alcuni generi di questa altrettanto vasta quanto naturale famiglia delle Composte provano colla scorta dei fatti la verità della regola da noi fissata al n. **10**, nessun carattere serbare lo stesso valore in tutti i generi, nè anche della stessa famiglia, benchè più facilmente ciò avvenga in questi ultimi e specialmente fra' generi più somigliantisi. Vedemmo in fatti che il rostro, che pure è costante in alcuni generi (p. e. *Lactuca, Phaenixopus*) non lo è più nelle *Crepis*; che il pappo, costante, caratteristico e generico nelle *Crepis*, e ne' *Hieracium*, non lo è del pari nei *Chrysanthemum*, nella *Matricaria*. nei *Gnaphalium*, nei *Leontodon;* che l'involucro caratteristico nella *Gatyona*, non lo è più nella *Lactuca*, nel *Tripolium*, nella *Linosyris;* che infine l'ampiezza o la ristrettezza del ricettacolo non serve a distinguere le Achillee dalle Ptarmiche. Ciò prova ancora l'aggiustatezza e

la utilità della conclusione di quella regola, che quantunque sia più facile che un carattere serbi lo stesso valore fra generi affini di una stessa famiglia, non si può affermarlo con sicurezza se non dopo riconosciuta coll'esame delle specie di ciascuno di tali generi la costanza ed universalità del medesimo.

A comprovare viemmeglio la verità delle esposte leggi faremo adesso un rapido esame critico ai generi novellamente fondati sulle specie europee del genere Linneano *Campanula* di cui nessuno può negare la evidente naturalezza. Sono eglino i generi *Specularia, Edraianthus, Roucela, Campanula, Wahlenbergia, Adenophora.* Il principale, se non il solo carattere, per cui furono divise in più generi le Campanule, consiste nel diverso modo, con cui s'apre la loro capsula. Ma quanto sia variabile questo carattere in queste piante, nè perciò possa in tutte essere apprezzato come generico, risulta chiaramente dall'esame che siamo per fare del frutto delle medesime. Esso è una capsula che varia nel numero delle logge da cinque a due, ed è ricoperta dal calice che vi aderisce ora per tutta la sua lunghezza, cioè sino all'apice, ed allora dicesi capsula inferiore o aderente, nel qual caso non ha valve nè suture distinte: ora per una parte di essa, ed allora chiamasi semi-superiore od adnata, e dividesi in valve separate da suture nella parte superiore non vestita dal calice. L'aderenza notata è sì stretta che il calice s'immedesima e si confonde coll'epicarpo del frutto, nè questo può schiudersi mai per tutta quella parte che n'è coperta senza lacerazione di quello. Questa semplice esposizione della struttura esterna del pericarpio nelle Campanule basta a far chiaro non esserne possibile la deiscenza in quelle specie che hanno il frutto inferiore, o compiutamente aderente al calice; e poter solo avvenire in quelle altre che l'hanno semi-superiore od adnato, ed in quella sola parte di esso ch'è nuda e libera d'ogni aderenza, se per deiscenza vogliamo ritenere col cel. De Candolle *l'aprimento regolare di un frutto senza lacerazione, e lunghesso le suture che congiungono le sue valve.* (DC. *Th. élém. p.* 405). Secondo la duplice struttura osservata nel frutto delle Campanulacee vennero esse già distinte in due tribù, delle quali però devono essere leggermente modificati i caratteri, e quindi ancora

la collocazione e distribuzione dei generi. La prima si è quella delle *Wahlenbergiee,* la di cui capsula è adnata per certo tratto al calice che la circonda, e sopra questo dividesi in valve regolari: l'altro delle *Campanulee,* la di cui capsula è aderente al calice per tutta la sua lunghezza, non ha vere valve, e si apre per sola lacerazione. Alle prime appartengono fra le europee due sole specie, la *Wahlenbergia hederacea,* e la *W. nutabunda,* mentre il vecchio genere *Jasione,* ed il nuovo *Edraianthus,* che vi furono riferiti, spettano più propriamente alle *Campanulee* perchè hanno una capsula affatto inferiore, la quale perciò non si apre in vere valve, ma si lacera irregolarmente alla cima, schiudendo un largo foro dond'escono i semi.

Alle *Campanulee* quindi appartengono tutte le altre Campanule europee, e tutti i generi in cui furono scompartite. In queste piante i semi non trovando alla loro maturità nel pericarpio, che li racchiude, una struttura, che ne permetta lo schiudimento regolare per valve, ossia la deiscenza, obbligano questo a squarciarsi più o meno irregolarmente in que' punti ove ne trovano più deboli le pareti, e se queste resistono, sforzano l'apice del medesimo dov'è scoperto dal calice e più sottile, ed escono per di là. Gli è perciò che a seconda del sito ove incontrano questa minor resistenza essi lacerano il pericarpio ora alla base, or verso il mezzo, or presso la sommità, ed a seconda della maggiore o minore sottigliezza del punto, che deve cedere, or questa rottura è un foro più o men rotondo prodotto dal distacco ed arricciamento all'insù di una porzioncella ingrossata delle pareti laterali, la quale persistendo attaccata ad esse sembra quasi il coperchietto sollevato del foro; ora è una fessura bislunga od una lacerazione irregolare e variabile delle medesime dove sono più assottigliate. Qualche volta poi in una stessa specie (*C. ramosissima*) s' incontra indifferentemente o il foro quasi regolare verso la metà della capsula col coperchietto arricciato all'insù, o una rottura irregolare in altra e diversa parte più sottile di essa. Tutte le aperture sin qui notate si trovano nelle Campanule vere dei moderni autori, e solamente sulle pareti laterali del loro frutto ricoperte dal calice. Invece in altre Campanule (*C. graminifolia, C. tenuifolia, C. pumilio* ecc.), sulle quali si fondò il genere *Edraianthus,* lo

squarciamento del frutto avviene nella sola sommità del medesimo ch'è scoperta largamente dal calice, e su questo carattere appunto fu fondata la distinzione del nuovo genere. Ma abbiamo una pianta appartenente alle vere Campanule (*C. Erinus*, e forse anche la *C. drabaefolia*) affine assai agli *Edraianthus* per l'ampiezza della fauce del calice, ch'è molto spiegato. e quindi ancora per la larghezza della sommità libera della capsula, la quale riunisce i due modi di apertura proprii l'uno delle Campanule vere, l'altro degli *Edraianthus*, perchè presenta alla perfetta maturità contemporaneamente sì i fori laterali, che la rottura alla cima, oppure indifferentemente or l'uno, or l'altro di tali modi di aprimento. Gli è perciò appunto, che il Dumortier che forse osservò il primo caso, quello cioè della doppia apertura, ne fece il nuovo genere *Roucela;* il Linneo invece, il Jussieu, il De Candolle ed altri, che videro i soli fori alla cima, le attribuirono una deiscenza terminale, mentre altri moltissimi videro i fori stessi solamente alla base, e collocarono questa specie fra quelle, che si aprono per di là. L'attenta osservazione di questa incostanza nel sito e modo con cui si apre la capsula della *C. Erinus* prova incontrastabilmente l'invalidità del carattere, su cui si fondarono i generi *Roucela* da un lato, ed *Edraianthus* dall'altro, e ne comanda la soppressione, anche perchè contrarii alla regola Linneana chiarita dal De Candolle, non bastare per fare un genere che un sol carattere possa separare una o più piante da quelle che lor somigliano, sì ancora essere mestieri che quelle e si avvicinino fra loro, e si dispaiano dalle altre pel portamento. Ora prescindendo anche dalla notata mutabilità del carattere, manca ai generi sopra notati quest'ultima condizione, mentre una evidente uniformità e somiglianza di portamento unisce insieme la *Roucela* e gli *Edraianthus* colle altre Campanule, e specialmente questi ultimi colle specie. i cui fiori sono aggregati a foggia di capolino.

Il genere *Specularia* fu distinto dalle Campanule, anzichè per la deiscenza (che si fa per lacerazione bislunga della capsula sotto il suo apice, come in altre Campanule), per la corolla ruotata, e per il frutto prismatico. Però il primo di questi due caratteri desunto da un organo mutabilissimo nelle Campanule, ove assume tutte le forme, non è esclu-

sivo alle Specularie, mentre già trovasi nelle Campanule vere, p. e. *C. Elatines*, *C. garganica*, *C. elatinoides*, e quindi non può servire a distinguerle. Il frutto non è un lungo prisma in tutte le Specularie, ma nella *Sp. perfoliata* ha forma conica inversa, e perciò similissima a quella del maggior numero delle vere Campanule, che i botanici chiamano *turbinata*. Laonde anche questo genere perchè mancante di caratteri proprii e costanti non può essere conservato.

Il genere *Adenophora* si distingue dalle altre Campanule per un carattere a dir vero cospicuo, quale si è la presenza di un nettario cilindrico, che circonda la base dello stilo; ma questo carattere è solo, in alcune specie è minuto, non ha seco nemmen l'aiuto del portamento, che lo avvalori, e quindi non può bastare per le leggi adottate, a dividere dalle Campanule, specie che hanno con esse in comune tanti altri caratteri. Concludiamo perciò che i generi *Roucela*, *Edraianthus*. *Specularia* e *Adenophora* perchè fondati o sopra un sol carattere, o sopra caratteri non esclusivi e incostanti, non possono essere considerati che quali semplici sezioni, utili a facilitare il rinvenimento delle specie in un genere molto vasto, ma insieme naturalissimo, dal quale non possono essere separati senza violare ed infrangere le moltiplici affinità di struttura e di forma, che li uniscono alle Campanule. È a questo genere che s'applica esattamente la quinta legge che abbiamo ammessa, e quadra a capello la seconda delle due regole fondate dal De Candolle: quando in un dato ordine esista un genere assai distinto pei caratteri e pel portamento, questo genere dev'essere conservato intatto anche se alcune delle sue specie presentassero caratteri da poterlo dividere (*Th. élém.* p. 188).

Nelle Scrofularinee alcuni autori seguono tuttavia a confondere gli Antirrini colle Linarie, altri lacerano l'Eufrasie in parecchi generi insussistenti. Ma la obliquità del calice, la corolla e la capsula gibbose alla base, quest'ultima obliqua all'apice, ed ivi aprentesi per tre pori, distinguono nettamente gli Antirrini dalle Linarie, in cui il calice è regolare, la corolla allungasi nel di dietro della sua base in un'appendice che assottigliasi in punta, la capsula è affatto regolare, ed all'apice schiudesi in due valve trifide, o intere, ovvero più raramente apren-

dosi mercè due coperchietti che si staccano circolarmente dalle due valve, schiude un'uscita ai semi in ciascheduna valva vicino all'apice delle medesime. Dalle Eufrasie al contrario si smembrarono parecchie specie per farne i generi *Odontites, Eufragia, Trixago*, e *Bartsia*. La prima però non differisce dalle Eufrasie se non se pel meschino carattere, che in queste la setola, in cui finisce la loggia inferiore delle antere degli stami più corti, è più lunga di quelle, con cui finiscono le altre logge, mentre nelle *Odontites* son tutte eguali. L'*Eufragia* non diversifica che per avere la capsula assottigliata in punta anzichè bislunga ed ottusa, ed i semi lisci anzichè striati o costati: ma questo secondo carattere, se anche avesse valor generico, varia nella stessa *Euphrasia latifolia*, che è il tipo del nuovo genere, in cui vidi talora i semi leggermente striati come son nelle Eufrasie: ed il primo è carattere di figura così inconcludente da potersi appena considerare come specifico, variando pure ne' generi affini. Il genere *Trixago* ha il calice campanulato, anzichè tubuloso come i generi precedenti, e la capsula più dura; ma quest'ultimo carattere è d'assai poco valore per dichiararlo generico, e quello della forma del calice si trova incostante nel similissimo genere delle Bartsie. Questo genere infatti, giusta il più recente lavoro del chiarissimo Bentham nel Prodromo del De Candolle, presenta nelle numerose sue specie ora il calice tubuloso ed ora campanulato; il labbro superiore della corolla ora intero ed ora intaccato; le antere or liscie or pelose, ora fornite di spina ed ora inermi; la capsula talor coriacea, come nella *B. alpina*, più spesso membranacea, tal volta rostrata od acuta e tal altra ottusa nella medesima specie; i semi ora alati or costati, e perciò prova evidentemente non essere essenzialmente diverso per alcun carattere dalle Eufrasie, alle quali deve essere riferito come sezione, ristringendola però a quelle sole specie che si distinguono pei semi alati, e della quale presenta il vero tipo la *B. alpina* L. ch'io chiamerò *Euphrasia Bartsia*. Da questo esame delle specie del genere *Bartsia* ne viene ancora la conseguenza, i caratteri sopraddetti non essere per la loro mutabilità sufficienti alla distinzione dei generi delle Rinantacee testè proposti, come non lo sono nelle vicinissime Antirrinee, ove la sola fi-

gura della capsula, e i caratteri esterni dei semi presentano bensì buoni caratteri specifici o al più di sezione, ma nessuno si avviserebbe di trarne da que' soli fondamento alla costruzione di nuovi generi.

Non sarebbe certamente difficile l'estendere l'esame sin qui istituito anche agli altri generi novellamente creati sullo smembramento dei vecchi nelle varie famiglie di piante, onde colla scorta delle regöle sopra esposte confermare quelli che vi si accordano, e provare l'insussistenza degli altri che ne dissentono. Però il saggio dato di un tal lavoro sopra alcuni generi di quattro naturali famiglie parmi poter bastare a far conoscere la maniera, con cui potrebbe esser fatto nelle altre, e sopra tutto a provare la verità, utilità, e sufficienza delle leggi per noi raccolte intorno alla costruzione ed accettazione de' generi, nonchè a chiarire il modo, con cui vogliono essere applicate ai medesimi per apprezzarne debitamente il valore. Così i botanici fermamente volessero e mantenerle e seguirle concordando unanimi nel concetto vero del genere, e riprovando severamente quelli che ne deviano! Solo allora, e quando si fossero fermate regole eguali per le specie, lo che sarà argomento della seconda parte di questo lavoro, porrebbesi un saldo freno al pazzo arbitrio di cangiar nomi alle piante, che or noia e brutta ed impaccia la scienza, e le vale l'amaro ed ingiusto scherno di scienza dei nomi. Senza un tale provvedimento, di cui stringe il bisogno, la confusione, che da ogni parte cresce e ci attornia, minaccia trarla a una certa ruina, ned avvi modo a salvarnela, se non tornandola alla rigorosa osservanza di quelle leggi che le fruttarono i meglio fondati generi che si conoscano.

Impugnino pertanto coloro che l'amano, e la giovano de' loro scritti, e la onorano del loro nome, impugnino animosi e perseveranti questi strumenti invincibili di difesa, nè dubitino che sia loro per fallire il successo, particolarmente in Italia, ove gli osservatori più profondi che sottili meglio attendono alle generalità che ai minuti particolari, in Italia, ove già provarono col loro esempio la necessità della riduzione de' generi e delle specie gl'illustri autori delle Flore sarda ed italica; in Italia, ove innanzi a tutti e fin dal secolo sestodecimo sclamava quel

sommo filosofo e medico e naturalista che fu il Cesalpino *confusis generibus confundi omnia necesse est*, quel Cesalpino, il cui ingegno e la cui dottrina levarono in tanta ammirazione un Linneo da farlo prorompere ne' noti versi

Quisquis hic extiterit, primos concedat honores,
Caesalpine, tibi, primaque serta dabit.

(*Letta il* 19 *Luglio* 1846)

PARTE II.

DELLA SPECIE

Se l'incertezza o l'inesattezza del concetto, che alcuni botanici si son fatti del genere, e la discordia loro nell'apprezzarne i caratteri sono cause principalissime della incessante mutabilità de' nomi generici delle piante, e della faticosa e scoraggiante sinonimia, che ne offusca e ne intristisce la scienza, come mi sono adoperato di dimostrare nella prima parte, non meno dannosa io m'avviso la intemperante facilità, con cui taluni si sbracciano a creare novelle specie, e a fabbricare novelli nomi per indicarle. Lo imperchè ho stimato utile l'imprendere eziandio per la specie un lavoro simile a quello del genere, nel che fare ho frugato negli scritti de' botanici che dal Linneo al De Candolle più accuratamente studiarono questo grave argomento, per indi trarne quelle regole, che confortate d'esempii, e raffermate d'altre avvertenze che a me apparvero utilissime nella pratica, bastar potessero, o per lo meno grandemente giovare nella fondazione e nella accettazione delle novelle specie.

I botanici anteriori al Linneo non avevano un'esatta idea della specie, che confondevano sempre e nel concetto e nel nome con altre associazioni inferiori. Il Linneo fu il primo a definirla, e a distinguerla dalle varietà, e questo primo raggio di luce, balenato appena nell'alta intelligenza di quell'uom prodigioso, schiarò d'un tratto il tenebroso e inordinato caos della scienza. Gli esseri tutti della natura allor noti trovarono ben presto il carattere che li distingue, il nome che li personifica, e l'immensa opera di qualificare, denominare e distribuire ordinatamente quanto esiste in natura progredì poscia con passi rapidi e giganteschi sulle norme da lui fondate, per non arre-

starsi mai più. Però nell'atto di distinguere la specie dalle varietà, che talvolta ne assumono le apparenze, furono spesse volte e son tuttora vacillanti i botanici, per cui e furono create assai false specie, e talor anco per lo contrario furono alcune specie indebitamente considerate quai varietà. Nè a togliere questa incertezza si stabilirono regole concordi e sicure, sì invece questo grave punto di scienza fu lasciato non dirò al criterio, ma all'arbitrio di tutti. Poche parole ed insufficienti ne dissero i trattatisti: il primo ad occuparsene con diligenza e ad esaminar la quistione in ogni sua parte si fu il cel. De Candolle, che nella Fisiologia all'articolo della Specie, e nella Tassonomia in quel libro che tratta delle associazioni diverse delle piante, diede precetti ed avvertimenti, che nessuno e per le cognizioni teoriche, e per la vasta sua pratica era in grado di stabilire meglio di lui. Da queste auree fonti pertanto, e razzolando qui e colà alcune avvertenze sparse in altri autori eziandio, specialmente nella recente ed accurata memoria del sig. Chevreul *sur l'Éspèce*, io avrò materia bastevole per compiere il mio lavoro, in cui m'ho prefisso di raccogliere ed ordinare tutto che di meglio sia stato finor pensato sull'argomento.

Chi getta un primo sguardo sulle produzioni infinite de' regni organici non vi scorge di primo tratto che una moltitudine varia, confusa, innumerevole d'individui, d'esseri cioè che posson vivere e vivono distinti e indipendenti da ogni altro. Ma se attendendo più di proposito ad osservarli, ei si faccia, anche scevro d'ogni prevenzione, d'ogni cognizione scientifica, a raffrontarli tra loro, non tarderà ad avvedersi, che fra questi alcuni si somigliano più fra di essi che non cogli altri, e seguitando l'indagine ed il raffronto gli sarà agevole a ravvicinar colla mente questi esseri più somiglianti, e ad associarli ancora fra loro mercè alcun carattere, che scoprirà ad essi comune, e pel quale potrà distinguerli dai circostanti. Questo primo grado di associazione degli esseri somiglianti gli è ciò che chiamiamo *Specie*, ed è da questa che incomincia tutti i suoi studii il naturalista, è questa la base d'ogni sua classificazione. Non avvi alcuno per idiota che sia, il quale penetrando in una foresta non iscorga a prima giunta che i

pini sono similissimi fra di loro, e ben diversi dai frassini; che percorrendo una campagna piantata a viti non s'accorga che queste son tutte eguali fra loro nell' insieme de' lor caratteri, e diverse dall' albero che le sostiene. La specie esiste quindi in natura, esiste per l' idiota al pari che pel botanico, si appalesa agli occhi di tutti perchè è indipendente dai sistemi dell'uomo, ed è pertanto affatto erroneo il principio opposto che professò prima e ritrattò poscia il Buffon, in natura non esservi che individui, mentre puossi invece affermare con verità, che alla sussistenza e propagazione della specie è legata intimamente la conservazione intera del regno organico. Pensano alcuni collo stesso Buffon, che le specie non sieno immutabili, ma in un lasso di tempo più o meno lungo possano cangiar caratteri, passare l' una nell'altra, suddividersi o riunirsi, originare in tal modo novelle specie o scemare di numero. Seguaci di tale ipotesi, altri immaginano ancora le specie in origine non essere state che pochissime, forse una per ciascun genere, e solo in processo di tempo modificate per esterne cagioni aver dato nascimento a quello sterminato numero che or ne ammiriamo. Rafforzano una sì strana sentenza (la quale se fosse vera distruggerebbe l' idea della specie, e renderebbe inutile la scienza che vi si fonda) coll'osservare che esistono in natura individui intermedii fra specie e specie, i quali paiono segnarne e dimostrarne i passaggi. A difendere la persistenza ed immutabilità della specie battagliarono vittoriosi i naturalisti più insigni, provandola e col mezzo di osservazioni di confronto fra le specie antiche e le presenti, e col mezzo di osservazioni e sperimenti istituiti per lungo tempo sopra un gran numero di specie, alcune delle quali coltivate allo scopo di riconoscere la durata de' lor caratteri. Le piante e gli animali conosciuti dai Greci e dai Romani, in gran parte si ravvisano anche oggidì sì per le descrizioni, benchè imperfette, che queglino ne lasciarono, sì per essersi conservati ne' paesi da essi abitati i nomi antichi, con cui que' popoli soleano distinguerli, e questi esseri serbano tuttora immutati i loro antichi caratteri. Gli animali e le piante indigeni già dell' antico Egitto, e raffigurati ne' geroglifici, e quel ch'è più, conservati in natura nelle necropoli, presentano tuttora i caratteri stessi e la più perfetta ras-

somiglianza con quelli analoghi, che or vivono e crescono nel paese delle piramidi, quasi per dimostrarci non esser avvenuto nelle lor forme il menomo cangiamento. Tremila adunque e forse quattromila anni non bastarono ad alterarle: e quale più lunga, più certa, più conchiudente prova di questa potrebbe l'uomo, nonchè chiedere, immaginare, onde accertare l'immutabilità della specie? In più di tre secoli dacchè esistono i giardini botanici, nei quali alcune piante si coltivano costantemente, e le annuali si riseminano ciascun anno, nessuno ha potuto cogliere il passaggio di una vera specie in un'altra, quantunque la promiscuità del suolo e del cielo, la prossimità delle specie affini, l'eguaglianza della cultura favoriscano potentemente queste trasmutazioni. Nel giardino del re a Parigi si fecero per trent'anni seminagioni incessanti ed in circostanze sempre variate di cencinquanta graminacee diverse, preferendo a bell'arte siffatte piante, come quelle, i cui limiti generici e specifici essendo sovente ambigui e leggeri, parrebbero dover confondersi più agevolmente, senza che al sig. Albret, e poscia al sig. Pepin, che condussero sì lungo tempo con pazienza pari all'avvedutezza siffatti sperimenti, fosse dato giammai di scorgere alcun passaggio dell'una nell'altra specie (V. Chevreul *Sur l'Éspèce* negli *Ann. des Scienc. natur.* Sett. 1846 pag. 171).

Nè l'esistenza d'individui intermedii fra specie e specie, se può in alcun caso difficultarne la distinzione, può mai distruggerne la differenza, giacchè o questi individui non si riproducono perchè sterili, o nelle ripetute seminagioni perdono i lor caratteri per riprendere quelli del tipo da cui provennero, che è sempre una delle due specie affini, e quindi si ha nella semina il mezzo di smascherarne e riconoscerne la vera origine e la natura. Che se questi individui nelle ripetute seminagioni non cangiano, sì invece serbano immutato il carattere cospicuo che li distingue da quelle, sono allora da considerarsi non quai passaggi da specie a specie, non quali variazioni intermedie ad esse, ma quai tipi di una specie nuova, alle stesse affine, ma pur diversa. Se invece accade, che quest'individui intermedii mostrino nelle varie forme sotto a cui si presentano un progressivo affievolirsi e successivo svanire del carattere differenziale delle due specie, allora il

botanico tiene in mano la prova, che le due specie sino allora credute tali, perchè i caratteri differenziali delle medesime se n'erano riputati costanti, non lo son punto, ed ha quindi un argomento invincibile, perchè di fatto, della convenienza di riunirle. Di che ne viene, che lo studio degli individui intermedii, e dei passaggi di forma, non solo non nuoce alla distinzione specifica, o ne indebolisce la forza, ma è, nonchè utile, indispensabile a dimostrare il valore specifico del carattere, che consiste nella immutabilità del medesimo; e quindi a far distinguere con sicurezza le vere specie dalle sottospecie, o varietà, o variazioni, che possono prenderne le sembianze. Alcuni esempii valgano a chiarir meglio il concetto. La *Matricaria Chamomilla* era tenuta e tiensi pur tuttavia distinta di specie dalle *M. pusilla*, *M. Courrantiana*, *M. pyrethroides*, e *M. coronata*, perchè in quella gli achenii non han pappo, in queste il pappo prende diverse forme, sopra le quali i botanici, che crearono siffatte specie, ne fondarono le differenze. Osservazioni ripetute e accurate provarono, che il pappo or manca, or si trova nella stessa Camomilla comune, e che la forma e la grandezza del medesimo sono variabili al pari della presenza fin nella stessa specie: perciò mancando a' caratteri di quest'organo ogni valore specifico e' fu forza riunire in una sola tutte quelle false specie, che non presentavano altra diversità che nel pappo. Il volgare *Chrysanthemum Leucanthemum* distinguevasi dal *Chr. montanum* perchè gli achenii marginali di questo hanno un pappo che manca nell'altro; il *Chr. graminifolium* separavasi dal *Chr. montanum* per le foglie più strette in quello che in questo. L'esame di molti achenii del *Chr. Leucanthemum* avendo provato, che talora anche in questi si trova il pappo, tolsero a questo carattere il valore differenziale; ed individui intermedii per la forma delle lor foglie fra il *Chr. montanum* e il *Chr. graminifolium*, mostrarono non poter sempre bastare questo carattere a diversificare fra loro, piante in ogni altro rispetto somigliantissime, e quindi forzarono il botanico a riunirle tutte in una sola. Lo studio attento e sufficientemente continuato dei caratteri è dunque il solo mezzo che abbiamo per distinguere le specie dalle associazioni inferiori: le quali, differendo fra loro pel vario grado di mu-

tabilità dei medesimi, vogliono essere ora partitamente illustrate, premettendo a queste la definizione della specie, di cui l'altre non sono che gradazioni.

La *specie* è una riunione d'individui più simili fra di loro che a tutti gli altri, per cui si possono considerare tutti procreati da una stessa pianta ermafrodita o monoica, o da una coppia di piante eguali dioiche, i quali hanno in comune alcuni caratteri immutabili, e si riproducono inalterati per generazione diretta e costante. Il carattere che la distingue è perciò detto specifico, e si dispare dal generico in ciò, che ritraesi da organi di minore importanza, preferibilmente da quelli della vegetazione, più di rado dagli accessorii della riproduzione, più raro ancora dagli attributi men rilevanti degli stessi organi riproduttori. Distinguesi poi dal carattere delle associazioni inferiori per la sua maggiore importanza, e perchè riproducesi costantemente colla seminagione.

La *sottospecie* è una riunione d'individui, i cui caratteri comuni reggono alla cultura, e si riproducono di seme come quei della specie, ma sono di una importanza inferiore. Il papavero a seme bianco (*Papaver officinale* Gmel.) differisce pel solo colore dei semi dal *P. somniferum*, in cui nereggiano. Questo carattere si conserva nelle risemine, ma pel suo poco valore non bastando a qualificare una specie, vale solo a distinguere il *P. officinale* qual sottospecie.

La *razza* (stirps), che il De Candolle chiama ancora *varietà permanente per seme*, è una riunione d'individui simili, i cui caratteri comuni si conservano immutati per divisione, ed anche per generazione, ma non per sempre nè in tutte le circostanze. La digitale, il giacinto, il papavero, la *Lychnis Chalcedonica* a fiori bianchi, e queste stesse piante a fiori rossi riproducono ordinariamente il colore proprio della pianta da cui derivano; ma ciò non è così costante nelle diverse condizioni, come lo è della sottospecie, per cui cangiando quelle, tendono esse pure a degenerare ed il colore si muta. Alle razze appartengono alcune modificazioni di forma, di mole, di carnosità, di sapore, di odore avvenute in alcune specie primitive, da cui originarono parecchie delle nostre migliori frutta, per esempio nelle Cucurbitacee, e de' nostri

erbaggi più ricercati, come nelle Carote, Selleri, Rafani, Cavoli, Asparagi.

La *varietà*, detta ancora *varietà permanente per estensione*, è una riunione d'individui simili, i cui caratteri comuni scompaiono colla seminagione, nè si possono conservare altrimenti che per divisione di parti, cioè per innesti, margotte, talée. Il sapore zuccherino od aromatico di alcune frutta o svanisce o si cangia in altro scipito od acido o lazzo, se alcun si avvisa di voler riprodurre di seme coteste piante.

La *variazione* infine o *varietà locale* è una modificazione di alcun carattere della specie, prodotta da circostanze esteriori di elevazione, di luce, di temperie, di umidità, nonchè da quelle della coltivazione e del suolo, la quale non può essere conservata e trasmessa nemmeno per divisione. Alcune piante spinose o pelose o vischiose, proprie de' luoghi secchi e delle esposizioni più solatíe, se si coltivino in terreno morbido e grasso, o in situazione più umida e fresca, perdono in alcun tempo la facoltà di riprodurre negli individui, che generano, le spine, i peli, o l'umore viscoso che ne spalma la superficie. Riepilogando il già detto, la *specie* si propaga per semi, non si muta per cangiare di circostanze: la *sottospecie* si propaga di seme, ma differisce dalla specie per la poca importanza del suo carattere: la *razza* si propaga pure di seme, ma non sempre, nè in tutte le circostanze, e negletta degenera: la *varietà* non si propaga che per divisione di parti: la *variazione* infine è una semplice forma locale ed accidentale, che svanisce al mutar delle circostanze che l'han prodotta, e non può trasmettersi nè anche per divisione.

Le sottospecie e le razze possono alcuna volta oscurare la vera specie, renderne incerti i limiti, e alquanto vago il concetto. Ma se quelle distinguonsi tosto alla tenuità del carattere su cui si fondano, le razze, che si possono considerare qual prodotto lento e successivo operato dall'arte e dalla natura sui caratteri men rilevanti e perciò più mutabili della specie, per la incessante loro tendenza a degenerare onde riprodurre le sembianze del tipo da cui derivano, tendenza ben nota ai coltivatori che l'accagionano della perdita di tante razze di frutta d'antica celebrità, che scomparvero interamente da' lor ver-

zieri per non tornarvi forse mai più, non possono a lungo andare lasciare in forse il botanico sul vero loro significato. Sono più copiose le razze in quelle specie, che o per la loro utilità o per la loro vaghezza sono coltivate da più lungo tempo, o sopra più esteso spazio, o in maggior numero, o in climi più differenti, e con maggior industria ed assiduità. Da ciò si scorge aver grandemente contribuito a produrle e la antichità delle coltivazioni, cui furono sottoposte le specie madri, e le condizioni diverse di clima e di suolo, in cui quelle si coltivarono, e gli ingegni od artifizii varii della cultura. Ciò è tanto vero, che, cangiando alcune di queste condizioni, svaniscono i caratteri delle razze. Chi non sa che i semi di alcune razze di erbaggi, come Asparagi, Cavoli, Radicchi, Lattughe, Finocchi, Selleri; di alcune radici, come Carote, Rafani; di certe frutta, come Cetriuoli, Meloni, Cocomeri, procurati da que' paesi, in cui tali prodotti sono più squisiti o più grossi, dopo alcune coltivazioni degenerano; ed è forza per riaverle rinovar le sementi, ritirandole sempre da que' primi luoghi privilegiati, ove esistono le condizioni, che da prima produssero, e sole valgono a conservar loro quel grado di perfezione nella forma, nelle dimensioni, nel sapore, o nell'odore che vi ammiriamo?

A queste efficacissime cause della origine delle razze se ne aggiunge una ancor più possente, quella vo' dire dell'*ibridismo*, prodotto dall'azione del polline di una pianta sopra i pistilli d'un'altra affine a quella. Questa estranea fecondazione, detta ancora fecondazione reciproca o incrocicchiata, può avvenire fra individui di due specie congeneri, di due sottospecie, di due razze, di due varietà, fra individui della medesima specie, ed anche tra due fiori di uno stesso individuo. Può accadere naturalmente, e può essere procurata dall'arte. Si chiama *ibrida* la pianta nata da semi procreati da due specie congeneri, e potrebbero collo Chevreul chiamarsi *sottibride* quelle, che provengono dalla fecondazione reciproca di due razze o di due varietà sì della stessa specie che di specie vicine. La formazione degli ibridi è assai rara in natura, perchè a compierla con successo si richiede il concorso contemporaneo di condizioni molte e diverse, quali sono l'analogia strettissima di struttura e di forma fra le piante da

fecondarsi, la loro prossimità, la coincidenza perfetta della maturità del polline di una pianta colla pubertà del pistillo nell'altra, la verginità dello stimma, e l'assoluto difetto di polline proprio nella pianta che si vuole fecondare. Senza quest'ultima condizione non si ottiene ibridismo, perchè le osservazioni di M. C. J. Gaertner han posto fuor d'ogni dubbio, che il più piccolo granello del proprio polline annienta affatto l'azione di qualsivoglia polline estraneo, per cui i giardinieri, che operano la fecondazione artificiale, hanno l'avvertenza di privare il fiore da fecondarsi di tutti i suoi stami prima ancora che questi sieno maturi, onde antivenire il versamento del polline sul pistillo. Mancando l'una o l'altra delle condizioni or mentovate, la fecondazione estranea non raggiunge il suo scopo, quello cioè di far concepire alla femina semi capaci di riprodurre i tratti materni e paterni riuniti e contemperati nell'essere che da quelli è per nascere. Gli è perciò che pochissimi sono gli ibridi naturali di certa e provata origine, sommando appena a quaranta tutti quelli che in più di un secolo i botanici han potuto osservare. S'incontrano solo fra le specie più somiglianti e congeneri, e fra i generi più numerosi di specie; di pochi si sa con certezza che sieno atti a riprodursi di seme, e pare anzi probabilissima l'opinione del De Candolle figlio, che anche questi poco durino, si estinguano spesso, e poi di tratto in tratto si rigenerino accidentalmente in que' luoghi, ove i loro parenti crescono numerosi e vicini. Ma se son rari gl'ibridi naturali, gli artificiali, quelli cioè che l'uomo stesso procura colla fecondazione, possono a suo talento riuscire infiniti, e già ne abbiamo esempii anche troppi ne' Pelargonii, nelle Cinerarie, nelle Calceolarie, nei *Dianthus,* nelle *Phlox*, e in molti altri generi dei più leggiadri ed insieme più numerosi. Ei gli ottiene sia senza volerlo e talor senz'addarsene, coltivando insieme in gran copia alcune specie più disposte alla reciproca fecondazione; sia fecondando a disegno la femina d'una specie, d'una razza, o d'una varietà coi maschi dell'altra. Gli esseri bastardi che ne provengono sono intermedii ai parenti, somigliando alla madre, secondo le osservazioni dell'Herbert sulle Amarillidee, negli organi della vegetazione; al padre in quelli della riproduzione. Quando ciò avvenga fra due specie di-

verse, tali individui rendono alcuna volta incerti i limiti che le dividono. Ma fortunatamente quest' ibridi raramente si riproducono, e se anche il fanno, ordinariamente non si perpetuano, e tendono all'*atavismo*, ch'è quanto dire a riprendere la forma di una delle due specie da cui derivano, lo che raggiungono per lo più nel corso di poche generazioni, mostrando sempre nelle semine ripetute quella lenta ma continua mutabilità di caratteri, che all'occhio dell'osservatore avveduto li fa ben presto riconoscere per ciò che sono, e distinguere dalla specie.

Non è così dei sottibridi, nati cioè dall'incrociamento di una razza o di una varietà con un'altra d'eguale o diversa specie, in cui essendo massima l'analogia, facilissima è la fecondazione, e più sicuro il successo. Gli è a questi, che probabilmente si debbono quelle più o meno leggiere modificazioni delle piante assai coltivate, nelle dimensioni, nel numero, nella forma, nel colorito, nell'odore e nel sapore, le quali, restando intermedie fra specie e specie, ne velano e ne confondono le differenze, e così imbarazzano i botanici nell'apprezzamento de' lor caratteri, e quindi nella loro distinzione reciproca. Però anche questa causa agisce entro limiti assai ristretti, nè può recar confusione che in certi casi, quando cioè si tratti di quelle piante, che sono più copiosamente e più diffusamente coltivate, le quali e per crescere in massa, e per essere similissime fra di loro, presentano le condizioni più favorevoli all'ibridismo. Ma in queste pure l'atavismo proprio degli ibridi, il successivo apparire di sottibridi intermedii, che nelle seguenti generazioni, sorgendo fra la specie e il suo ibrido, ne fanno svanire le differenze, e da ultimo la sterilità sì frequente dopo la terza o quarta generazione in questi versatili e capricciosi prodotti dell'artificiale fecondazione, lascieranno assai per poco peritoso il botanico, che ne seguirà le fasi ed i cangiamenti, sulla vera origine e natura di tali piante.

Fermate sin qui le idee, che ci sembrano più accettevoli sul vero significato della specie, della sottospecie, delle razze, delle varietà, delle variazioni, e degli ibridi; toccate le quistioni più gravi che ad esse si riferiscono, chiaritine i limiti, e mostrato il modo di non confon-

derli, o disconoscerli, procederemo ora a segnare sulle norme e sugli esempii datici dai botanici più accurati e più circospetti le avvertenze più utili da seguirsi nella creazione ed accettazione delle specie nuove, onde compilare anche per la specie, come s'è fatto pel genere, un saggio di codice a questa parte di scienza.

1. La vera specie deve essere distinta dalle congeneri per uno o più caratteri communi e costanti, tratti dagli organi della vegetazione, o dagli accessorii della riproduzione, o anche dagli stessi organi riproduttori essenziali, usando però fra questi ultimi di que' soli caratteri che non fossero stati adoperati pel genere.

Nota. Il carattere della specie dev'essere costante, e comune alle diverse sue forme. In queste però esso può soggiacere a piccoli cangiamenti passando da forma a forma senza che ciò distrugga la specie. Ma se in alcuna di quelle ei dileguisi al tutto, o si assottigli od oscuri a segno da rendersi in qualche individuo irriconoscibile o assai leggero, quel carattere non è specifico, e la specie che vi si fonda non dev'essere conservata.

2. Quando il carattere specifico è unico, deve esser tratto dagli organi di maggior conto, o almeno dagli attributi più importanti degli organi, i quali sono la esistenza o la mancanza primitiva od originaria di questi, la relativa lor posizione, e la forma dipendente dalla struttura.

Nota. Ciò specialmente dev'essere osservato a rigore quando trattisi di fondare una specie sopra un solo esemplare, nel qual caso potendo avvenire che il carattere anzichè essere costante sia accidentale, si corre rischio di creare una falsa specie. Gli è perciò che in simili circostanze il carattere dev'essere di tale significazione organografica da non potersene attribuire l'origine a veruna causa estrinseca od accidentale. E qui è d'uopo ripetere ciò che si disse del genere, che nemmen nelle specie affini un organo ha sempre la stessa importanza; o un dato carattere un egual valore; in modo che ciò che si trovò costante in una data specie debba esserlo di necessità anche negli individui tutti di un'altra benchè consimile. Di che ne viene la necessità di studiare il valor del carattere negli individui stessi e nelle forme varie di ciascheduna specie per accertarlo; ed il danno che ne può

sorgere nel dedurlo in alcuna di esse dalla semplice analogia, ch'essa tiene con altre, benchè congeneri e somiglianti. Quanto alla forma veggasi la regola quinta.

3. Il carattere tratto dal numero delle parti relativo e costante, quando questo non sia velato o confuso da difetto o da eccesso di sviluppo, ovvero da accidentali aderenze delle medesime, ha valore specifico.

Nota. Il numero assoluto de' tronchi, delle foglie, dei fiori, o delle lor parti non ha valore. Ma quando presenti costante differenza fra due specie vicine, ben presto acquista una reale importanza. Bisogna però avvertire, che anche il numero relativo può essere accresciuto da cause accidentali, per esempio da quelle che favoriscono uno sviluppo eccessivo; ovvero può essere diminuito da uno sviluppo più stentato del naturale, e dalle aderenze che possono contrarre alcuni organi fra di loro o colle parti vicine. A sfuggire gli abbagli di simil genere il botanico estenderà le sue indagini a un maggior numero di individui, e questi, se sia possibile, di diverse località.

4. Le dimensioni generali di una pianta non hanno valore specifico, ma le dimensioni relative o le proporzioni di alcune parti di una pianta con alcune altre quando sieno normali e fisiologiche, costanti, e indipendenti da cause estrinseche e accidentali, forniscono eccellenti caratteri.

Nota. Però anche le dimensioni assolute possono essere alcuna volta indizio di differenza, come quando di due piante simili l'una resta sempre piccola anche cresciuta in terreno morbido e grasso, l'altra sorge sempre a grandi misure anche nata o coltivata in un magro. Siccome ciò contrasta con la nota influenza del suolo sulla vegetazione, può indurre ragionevole sospetto, che le due piante diversifichino fra di loro e per altri caratteri.

5. La forma degli organi presenta in generale caratteri specifici comuni e costanti, ma solo allora che le sue modificazioni sieno legate e dipendenti da modificazioni analoghe nella struttura anatomica, ossia nella distribuzione de' vasi di un dato organo.

Nota. Una foglia può variare grandemente di forma senza che cangi

punto la sua struttura, ed allora siffatte forme non sono specifiche perchè variabili, come avviene nel *Senecio nebrodensis*, in cui le foglie passano dalla forma tipica appena dentata alla forma incisa, e successivamente alla pennatofessa, bipennatofessa, e multifida, sulle quali furono fondate a torto due altre specie, il *S. rupestris* ed il *S. laciniatus*. L'aver negletta siffatta regola proclamata dal De Candolle ingombrò di false specie infinite la scienza, ed oscurò i veri limiti delle buone.

6. La disposizione relativa delle parti somministra alla specie al pari che al genere la sorgente più pura d'ottimi caratteri differenziali.

Nota. Questo attributo è quasi sempre invariabile, perlocchè varrà meglio d'ogni altro a distinguere sicuramente la specie. In oltre lo studio del medesimo gioverà sommamente al botanico per ispiegare le anomalie de' caratteri ed apprezzarne debitamente il valore.

7. I caratteri tratti dal colore, dal sapore, dall'odore delle piante non possono considerarsi come specifici, e in nessun caso un solo di essi può bastare a stabilire una specie.

Nota. Il colore de' fiori, perchè variabile, non può mai fornir nota specifica. Però essendo stato osservato, che il color giallo non passa giammai al turchino, nè questo a quello, meno forse qualche rara eccezione, come fra i Giacinti, quando si tratti di due piante affini che differiscano fra di loro per questi colori, dovranno esserne più attentamente studiate le differenze, perchè la diversità sopra detta potrebbe essere indizio d'altre non osservate e specifiche. Il colore de' succhi proprii è costante, meriterebbe perciò a parere del De Candolle di essere impiegato come carattere; ma per anco nol fu. Costante è pure soventi volte il colore dei semi, e se ne valsero alcuni botanici per distinguere fra di loro, specie molto affini negli altri caratteri, come i Fagiuoli nelle Leguminose, e alcune Calaminte nelle Labbiate. Meno costante è il colore delle radici e dei pericarpii. Il color bruno, rosso, o giallo delle piante in istato sano, e le macchie di tai colori, con che ne sono alle volte screziate le foglie, non hanno valor specifico, forse perchè d'ordinario non si riproducono di seme, benchè in alcune specie sieno molto costanti, come nella *Maranta zebrina*, *Aucuba japonica*,

Arum pictum, *Croton variegatum* ecc. Al contrario il color glauco di alcune piante, il quale proviene da un'escrezione cerea di color verdemare, che emana dalle parti verdi e le vela, viene generalmente ammesso come specifico, sempre però in que' casi, in cui fu riconosciuto costante. Tutto ciò riguarda il colore nelle piante vascolari, mentre nelle cellulari e pel poco che ne sappiamo, e pella scarsezza ed incertezza de' lor caratteri, e perchè realmente in queste il colore sembra più essenziale ed intrinseco a' lor tessuti, i Micologi, gli Algologi, i Lichenologi, ed i Muscologi lo tengono e l'usano come specifico. Il sapore e l'odore non sono mai caratteri specifici, ma possono alcune volte essere indizio di siffatti caratteri; e perciò vogliono essere notati ed avvertiti dal botanico, che da questi può esser forse condotto alla scoperta di differenze maggiori e sino allora ignorate.

8. I caratteri del portamento od aspetto generale delle piante, considerati allo scopo di riunire in ispecie gli individui, che più si assomigliano, e di separarli da quelli di un'altra, non bastano mai a fondar soli una specie.

Nota. Però è sempre utile lo studiarli, perchè non solo servono spesso d'indizio allo scoprimento d'altri caratteri più essenziali, ma possono ancora convalidare una specie dubbia o fondata sopra un solo carattere. Il portamento ha perciò riguardo alla specie quello stesso grado di valore caratteristico, che abbiamo notato nel genere alla parte prima nella regola ottava.

9. La specie fondata sopra individui vivi, spontanei, numerosi, e cresciuti in condizioni diverse di clima, di suolo, di elevazione, di umidità presenta maggior sicurezza sulla validità, e costanza de' suoi caratteri, che non quella che trovisi in condizioni contrarie.

Nota. In conseguenza di questa legge al botanico corre l'obligo quando trattasi di fondar specie sopra esemplari secchi, o coltivati, o pochi. o di pochi e poco diversi luoghi di essere più rigoroso nella scelta ed accettazione del carattere differenziale, di non contentarsi di caratteri secondarii, di cercarne le differenze negli organi più costanti, quali sono quelli della riproduzione, di notare la patria, la stazione, la durata, e le varie epoche di vegetazione, fioritura e maturità dei frutti

delle due piante per ritrarre dalla loro eguaglianza o diversità altre prove della diversità, o dell'eguaglianza specifica della pianta creduta nuova coll'altra che più l'assomiglia. Che se fosse possibile il coltivare in condizioni variate la specie dubbia, e l'allevarla ripetute volte di seme, si avrebbe in questa prova il mezzo più certo per riconoscere la stabilità ed il valor del carattere, e quindi ancor della specie. Questo sperimento poi riuscirà indispensabile quando la nuova specie sia stata rinvenuta in luoghi coltivati con piante analoghe, nel qual caso bisogna andare molto a rilento nell'accettarla, potendo ella essere o modificazione di alcuna di quelle piante prodotta dalla cultura, o ibrido accidentale delle medesime.

10. La specie è tanto più naturale e distinta quanto è maggiore il numero e l'importanza de' caratteri, su cui si fonda.

11. Quando una specie cresce commista ad altre a lei legate per moltiplici analogie, senza che se ne scorgano in alcun caso i passaggi da quella a queste, malgrado la parità delle condizioni in cui vivono, avvi fondamento a crederla vera specie.

Nota. Il *Thymus acicularis* cresce frammisto a quella varietà del Serpillo, che è il *Th. angustifolius* del Persoon; ma benchè ne sia similissima l'apparenza non m'è avvenuto giammai di cogliere alcun passaggio da quello a questo ne' caratteri specifici delle due piante; perciò meritano di essere considerati come diversi, appunto perchè i loro caratteri si serbano differenti, malgrado la promiscuità e l'eguaglianza delle condizioni in cui crescono quelle piante.

12. Quando una specie dubbia e sommamente affine ad un'altra cresce in luoghi e condizioni diverse da questa, e ne sembra quasi una sostituzione, pria di accettarla come distinta se ne debbono cimentare i caratteri coltivandole l'una presso dell'altra, o almeno in condizioni simiglianti per accertarne la distinzione: senza tal prova può sorger dubbio che la specie ambigua non sia che forma locale.

Nota. Per contrario se una specie molto affine ad un'altra cresce in situazione affatto simile a questa, e se ne serba costantemente distinta, avvi una ragione di più, oltre il carattere, per riputarla diversa.

13. Quando occorrano individui intermedii fra specie e specie, che però tengano alcun chè di proprio e differente da entrambe, pria di formarne una specie nuova e distinta è necessario il provare l'immutabilità del carattere differenziale o coll'esame di copioso numero d'individui di differenti località, o meglio ancora ricorrendo alla coltivazione e alla semina.

Nota. Gl'individui intermedii, che possono indurre il botanico a sospettare in essi il tipo di una specie nuova, sono ordinariamente prodotti dell'ibridismo. Questo alcune rare volte origina qualche specie, ma d'ordinario non produce che delle razze, le quali tendono sempre a degenerare, o a dir meglio a riprendere le forme dell'uno o dell'altro degli esseri da cui derivano, col mutare delle circostanze modificano lor caratteri, e a lungo andare disvelano l'origine primitiva. Nessun mezzo adunque più sicuro e terminativo per riconoscerli quanto la cultura e le risemine ripetute dei medesimi, variandone accortamente ed incessantemente le condizioni e di cielo, e di suolo. Un carattere che resiste a siffatte prove per alcune generazioni basta a qualificare per buona specie la pianta che lo possiede. Senza di queste, o almeno senza lo studio ed il raffronto di buon numero d'individui di molte e ben diverse località nessun botanico circospetto s'avviserà di decidere del valore di un carattere intermedio, e di fondarvi sopra una specie.

Con queste norme, e con queste avvertenze, alle quali la sperienza degli errori altrui e dei proprii potrà col tempo aggiungerne delle altre, ma delle quali non sapremmo ora porre in dubbio l'aggiustatezza, il botanico potrà quasi sempre evitare il pericolo di dar per ispecie una razza, o meglio una varietà, addensando ognor più quelle tenebre, che l'ambizione frivola d'immaginarie scoperte, e la leggerezza di osservazioni precipitate seminarono fra le specie, particolarmente ne' generi più naturali e più numerosi. In alcuni di questi siamo arrivati a tale, come nei Delfinii, negli Aconiti, nei Dianti, nelle Rose, ne' Pelargonii, da non sapere oggimai come distinguerle fra di loro, sì perchè ai caratteri immutabili delle specie vere furono nelle descrizioni sostituiti i variabili, per cui elleno differiscono dalle false;

sì perchè gli ibridi procurati a disegno fra specie e specie n' hanno cancellati i confini. Di che ne viene che questi generi, e tutti quelli che si trovano in condizioni simiglianti, non potranno essere scientificamente e chiaramente ordinati, sino a che colla cultura e colla risemina lungamente continuata e variata degli ibridi e dei sottibridi non sieno restituiti questi al tipo da cui provennero. Chiarita allora l'origine di questi esseri capricciosi, si potranno bandir per sempre dalla scienza tutti que' nomi o barbari, o adulatorii, o iperbolici, od assurdi, che, introdotti per lo più da persone estranee alla stessa, la nomenclatura ne imbrattano, e a null'altro servono che a corbellare i creduli, ad arricchire gli accorti, e a far la scienza quasi complice di un mercimonio, in cui non resta ad essa altro partaggio che la vergogna ed il danno.

Colle quali parole io porrò fine al lavoro, che m'attento d'offerire a' botanici come breve saggio di un'opera, che la scienza nostra desidera, e di cui in nessun tempo fu sì vivamente sentito il bisogno. Fissar le regole da seguirsi nella creazione ed accettazione de' generi e delle specie, oggidì, in cui e gli atti accademici, e le pagine dei giornali, e gl'itinerarii de' viaggiatori riboccano di novità di tal fatta, gli è porre il solo freno possibile alla smania di crear falsi generi e false specie, e tor di mano a quelli che ne van presi le opportunità di coniare inutilmente novelli nomi. Possa la povera mia fatica, se non raggiungere lo scopo che m' ho proposto, eccitare almeno scrittori più profondi e autorevoli a trattare sopra un piano più vasto e con maggiore probabilità di successo, questo grande argomento, che da sè raccomandasi alle meditazioni di tutti, perchè nell'accurata distinzione dei generi, delle specie e delle varietà riposa tutto lo studio della natura, e perchè l'accurata distinzione di questi è legata intimamente alle più utili applicazioni, che stringono l'amena scienza dei vegetabili alla più preziosa delle arti, l'agricoltura!

(*Letta il* 28 *Marzo* 1847)

OSSERVAZIONI E RIFLESSIONI

SUL FUNICOLO OMBELICALE

DEL FETO UMANO

MEMORIA

DEL PROF. FRANCESCO CORTESE

I molti scrittori, specialmente dei nostri giorni, che con tanto profitto si occuparono dello sviluppo degli animali, non hanno avvertito, se la lettura delle più recenti opere loro non mi trasse in inganno, un fatto curioso risguardante la struttura del cordone ombelicale del feto umano; il qual fatto, sempre che sia confermato da nuove investigazioni, può chiarire la storia ancora mal certa del sistema venoso. E sebbene mi sia desso apparso evidente una sola volta, malgrado i ripetuti miei tentativi per ottenerne la rinnovazione, io sono abbastanza sicuro della sua realtà, per indurmi a renderlo noto ai cultori delle cose anatomiche; perciocchè esso si collega colla particolare conformazione di certi apparati venosi di alcune inferiori specie zoologiche, e le indagini microscopiche mi sembrano convalidarne le deduzioni.

Si ammettono in generale come materiali costruttori del funicolo ombelicale: una vena, due arterie, la gelatina del Warthon, un esterno indumento fatto dall'amnios, e traccie dei peduncoli dell'uraco, e della vescicola ombelicale. Schott e Valentin confermano la esistenza di fi-

lamenti nervosi procedenti dal plesso ipogastrico del feto, che seguirono coll'aiuto del microscopio a tre o quattro pollici lunge dall'ombelico. Le preparazioni del Fohmann, tendenti a dimostrare la presenza di linfatici, parvero all' Hyrtl tutt'altro che concludenti, ed anzi affatto analoghe agli stravasi del mercurio negli spazii intercellulari del tessuto intermedio. Ecco pertanto il risultamento delle mie osservazioni.

I. La vena ombelicale non si comporta sempre lungo il cordone al modo di un tronco unico attortigliato a spira colle due arterie. Non è raro il caso, che, recidendo il cordone a differenti altezze, si mostrino nella sezione due aperture venose ed altrettante arteriose; ed il fatto si rende chiaro colle iniezioni. Essendochè si scorge allora, che il tronco della vena si divide in due alvei per confluire a certa distanza in un alveo solo, in vicinanza all'ombelico del feto. Allora le arterie, molto inferiori sempre al calibro delle vene, appariscono come incastrate nei solchi lasciati da queste, ed il tessuto crasso, succoso, traslucido, che completa la rotondità del funicolo, si direbbe per la intima connessione coll'apparato venoso, quasi del tutto appartenergli. Imperciocchè nelle sezioni trasversali, come è facile vedere le arterie sbucciar fuori con tutto il loro parete dal piano della sezione, massime se si trascinano alquanto colla pinzetta, così è costante che la vena si mantenga sepolta ed immobile entro al medesimo, comunque si adoperi colla mano o cogli stromenti per cavarla da quell'astuccio. Onde se è agevol cosa introdurre i tubi d'iniezione nelle prime per la aperta boccuccia e legarveli intorno al naturale parete, altrettanto è mestieri incidere nel detto tessuto per cacciarli dentro alla vena. Ed è chiaro altresì porger esso al lume venoso, in ispezieltà nei cordoni ombelicali più crassi, una tendenza a rimanersene aperto e boccheggiante, che suol essere straniera a quei condotti, singolari anzi tutto per la rilassatezza delle pareti; la quale tendenza non si potrebbe meglio agguagliare, che a quella delle vene proprie ai corpi erettili nello stato fisiologico dell'organismo, od a quelle circostanti a certe patologiche produzioni, principalmente fungose, in cui la cellulare che le circonda passa per trasformazioni analoghe all'ordimento contrattile dei corpi anzidetti.

II. Questo tessuto in cui direbbesi quasi scavata la vena ombelicale, e che riempie i vani lasciati dalla forma cilindrica dei vasi, si mostra più crasso negli intervalli, che non alla circonferenza, ove lascia trasparire le svolte derivanti dal loro attortigliamento spirale. Preso fra le dita, scivola bruscamente per una certa gelatina filante e viscosa che scaturisce dalle sue celle. Levatone l'esterno indumento che procede dall'amnios, e presane una particella, se si cerca comprimerla fra due vetri, è quasi impossibile riuscirvi senza qualche aiuto straniero; perciò che scappa rapidamente come farebbe una fibro-cartilagine, sia per la naturale elasticità dei suoi componenti, o pel succo viscoso che ne riempie le celle. Guardato di traverso alla luce, rivela una trasparenza maggiore dei due strati amniotico e sieroso proprio alla vena, i quali come tutte le tonache congeneri si opacano poco dopo la morte, e nelle sezioni trasverse del funicolo dichiarano un confine opaco sulla perspicuità del tessuto intermedio.

III. Che le due tonache sopraccennate sieno affatto pertinenti al tessuto sieroso, mi parve largamente dimostrato dall'esame microscopico (Tavola II. fig. 1.). Lo stesso elemento celluloso, la stessa intrecciatura delle fila, che ho descritto in una mia Memoria sulla intima struttura delle tonache vascolari; e nelle forti pressioni lo stesso modo di sfasciarsi di quella trama per lasciar trasparire qua e là fascetti ondulati, sconnessi, come se tendessero a rivelare il primitivo elemento costruttore. Però una cellulare unitiva credo tener congiunte quelle membrane al tessuto intermedio (fig. 2. A), non come conseguenza di arte, ma come naturale legame principalmente di esso colle arterie; più stretta, e più difficilmente disgregata dalla pressione nei soliti fascetti serpentini e molli fra esso e la vena.

IV. Ora per istudiare questo tessuto intermedio, il quale è stracciabile soltanto in grossi e polposi fascetti, che appaiono opachi ai forti ingrandimenti, e coi deboli non lasciano rilevare l'interna orditura, ed è inoltre assai sdrucciolevole sotto le compressioni, ho pensato di limitarne piccole sezioni trasversali longitudinali ed oblique in un circoletto intagliato a mezzo un picciol disco di carta, che collocai sotto il compressore di Purkinje. Così imprigionato l'oggetto durante lo

schiacciamento versava fuori l'umore viscido Warthoniano, e la carta, assorbendolo, lasciava netta l'organica orditura che lo racchiudeva. La quale, come appena parve evidente allo sguardo, mostrò una trama filamentosa affatto diversa dalla cellulare delle due tonache testè mentovate (fig. 2. B). Perchè i fili mi apparvero disposti in direzione parallela, sempre in piani molteplici, leggermente ondulati, elastici nella pressione, non ramificati, pellucidi, senza essere cristallini e canaliformi, più crassi e regolari dei cellulosi, terminati alla estremità tronca da moncherino rotondeggiante, che non si sfibra od assottiglia. Onde guardato il margine del pezzetto si presentano tutti quei moncherini ad un livello, sormontati da piani diversi di altri simili, tanto più numerosi, quanto meno si stringe la vite del compressore; e per converso nell'atto del disgregarli, coerenti fra loro per guisa da non lasciarvi vedere nel mezzo fibrille cellulari interposte. Per la qual cosa cotesto elemento fibroso mi si offerse assai somigliante al tessuto contrattile circonferente i vasi sanguigni dei grossi animali, ed a quello dei condotti uterini e deferenti, il quale secondo le indagini dei moderni, e massimamente di Henle ch'io medesimo ho verificato più volte, apparterrebbe a quell'ordine di fibre che quest'ultimo appella muscolari non istriate, e che formano l'anello di transizione della cellulosa verso i tessuti capaci di contrazione. La sola differenza notevole è una maggiore succosità e pellucidità delle fibre, che starebbe in rapporto colla natura di tutti i tessuti della età infantile, paragonati a quelli di un individuo maturo.

V. Però questo tessuto organico, che mi parve sempre essere fondamentale ai corpi erettili e cavernosi, è qui parimenti il fondamento d'un corpo cavernoso ed erettile; il quale io non so che altri abbia intraveduto, e molto meno dimostrato con prove anatomiche. Iniettando un giorno una placenta, il cui funicolo era lungo da 16-18 pollici, poichè la massa era corsa lungo le arterie, spingendola entro la vena, quando pervenne a certe diramazioni nella placenta, ristagnò d'improvviso, come suole un liquido caldo e resinoso, quando nell'interno dei vasi incontra acqua, aria, o coaguli di sangue. Per lo che non rispondendo allo scopo ch'io m'era proposto, avrei rigettata quella fallita

preparazione, se non mi fossi avveduto spiccare lungo il cordone qua e là plache d'iniezione microscopica e capillare. Onde levato da una il velamento amniotico per vedere se fosse stravaso, avvertii quella massa essere coerente e difilata per canaletti chiusi, con intrecciature molto analoghe a quelle degli organi erettili. E perchè le cose vogliono specialmente essere dimostrate per la via dei confronti, rinnovai la iniezione in un cordone di altra placenta per guisa, che la pressione del fluido lacerasse la vena, e determinasse un versamento di massa, colla rottura di tutto il parete ed infiltrazione interstiziale nel tessuto circonferente.

VI. La prima iniezione venosa (fig. 3.) ha le forme identiche del corpo cavernoso dell'uretra iniettato per la vena dorsale del pene, del quale possiedo esemplari diversi e del tutto dimostrativi (fig. 4.). Due di quei pezzi, messi a riscontro sotto uguale ingrandimento del microscopio, si scambierebbero di leggieri uno per l'altro, nei luoghi ove il riempimento dei capillari e delle celle è riuscito completo. Perciocchè ambidue fanno vedere capillari grossi del diametro di 6 o 7 millesimi di linea (termine medio), cioè il quintuplo almeno dei capillari degli altri organi, spettanti più direttamente all'apparato arterioso. La loro maniera di ammagliamento è distinta per l'angustia delle aree in paragone del calibro del vaso generatore; e queste maglie appaiono molto spesso formate più presto da diramazioni subitanee d'un capillare, che tendono poco dopo a ricomporre un canale solo, od a sboccare in uno vicino, che non dalle anastomosi retiformi, comuni ai tessuti forniti di adeguata diramazione arteriosa. Ed oltre ciò le dette vene capillari, com'è costante nei corpi spugnosi ed erettili, mostrano per tutto svolte ed appendici baccate, quasi diverticoli del vaso, là dove si nasconde nelle cellule della trama fondamentale; non affatto simili in latitudine alle bacche cellulari del corpo cavernoso dell'uretra, come questa le ha più piccole di quelli del pene; ma rispetto a forma all'intutto eguali, ed egualmente sporgenti dai lati del vasellino. Che anzi là dove mancò la iniezione, o si scorgono empite le cellule sole, o queste medesime rimaste vuote, nel disseccarsi inturgidirono per l'aria racchiusa, non altrimenti che fanno i corpi erettili del pene,

quando si preparano colla insufflazione, ch'è una delle più chiare ed interessanti maniere di dimostrarne la continuità e la figura. E da ultimo, perchè nulla mancasse alla dimostrazione, nei luoghi lontani dalla iniezione, ove l'aria ebbe campo di uscire, il corpo spugnoso disseccandosi si ridusse stretto e membranoso, come l'uretra, quando disseccata non lascia più veder traccia di quel singolare ordimento che la circonda.

VII. Nel cordone ombelicale ove la materia si stravasò, nessuna apparenza si notò di quelle forme; perchè la materia stessa stracciò il tessuto: o completamente, fino a collocarsi sotto lo strato amniotico al modo di una sostanza amorfa ed omogenea; o parzialmente, ed ivi si dispose a striscie longitudinali e parallele, occupando i vani lasciati dalle fibrille distratte, che hanno, come dissi, quell'andamento medesimo. E sotto il microscopio, nello stato di freschezza del pezzo, quelle strisce apparvero nude ed irregolari, appunto perchè mancava ad esse una parete organica, che ne determinasse la figura.

VIII. Del resto la maggiore abbondanza e densità di quel tessuto cavernoso, io la rinvenni fra la vena e le arterie; in guisa tale, che queste ne sarebbero state circondate del tutto nei luoghi ove si ascondono sotto alla concavità che fanno le curve spirali di quella; e la vena non lo mostrava che ai fianchi, perciò che, nelle svolte riempiuta e distesa dalla iniezione, premeva contro al corpo spugnoso e ne impediva l'iniettamento. La qual circostanza io credo sia causa precipua della estrema difficoltà di conseguire sì fatte preparazioni piene e compiute; come non si otterrebbero nel corpo spugnoso dell'uretra se il suo canale fosse stato precedentemente disteso da un liquido qualunque, e tanto meno da uno coerente, tenace e distensivo qual è la materia resinosa liquefatta e calda; come difficilmente si ottengono altresì con questo processo i *vasa vasorum* delle vene in modo da ben conoscerne la capillare orditura. Per lo che le iniezioni microscopiche ch'io conseguii nelle vene dell'uomo anche di assai mediocre calibro, apparvero come effetti di una iniezione generale, intantochè il lume del vaso è rimasto vuoto.

IX. S'egli è vero che le iniezioni a mercurio, effettuate dal Fohmann in questo tessuto del cordone ombelicale, sieno pretti stravasamenti in-

tercellulari, com'io medesimo inclino a credere, traggo argomento da quelle a confermare la mia prova anatomica. Perchè quelle iniezioni si fanno assai spesso all'azzardo, pungendo il tessuto, ed introducendovi il beccuccio del tubo: poscia aprendo il robinetto, e lasciando che il mercurio si apra la via pei canaletti che trova patenti. Quante di queste iniezioni fatte a quel modo non devono appartenere anzi alle reti periferiche sanguigne che alle linfatiche! In alcune opere ricche di tavole io rilevai, coi confronti delle iniezioni capillari cutanee del sistema sanguigno da me possedute, i linfatici presentare la medesima disposizione d'anse e di maglie che a quelli è comune; laddove in figure di pezzi uguali manifestano una diramazione ed una orditura totalmente diversa. Eppure la identità delle forme vascolari è una delle prove dell' identità degli apparati organici, non solo dello stesso organo nella stessa classe, ma sì anche nelle varie classi degli animali, almeno riguardo al tipo. Per lo che io sono d'avviso che le iniezioni del Fohmann, se hanno apparenze ora canaliformi, ora baccate, come dall'essere sembrate stravasi è facile argomentare, possono essersi fatte nelle cellule e nei plessi venosi che ho poc'anzi descritto.

Aspettando però che altri confermi con prove anatomiche il fatto della esistenza di un corpo cavernoso lungo il funicolo ombelicale del feto, dopo avere descritto e delineato quanto mi occorse, io voglio tuttavia cogliere questa occasione per avvertire, che nel sistema delle vene si trovano presso animali inferiori esempii chiarissimi d'analoghe forme cavernose. È già molto tempo che, esaminando il sistema vascolare di alcuni pesci, io fermai l'attenzione sulla natura spugnosa delle vene cave, più somiglianti in certuni a veri seni che a canali semplici membranosi; ma nessuna cosa mi colpì maggiormente quanto la singolare struttura delle pareti proprie alle vene mesenteriche, efficienti la vena porta, nella famiglia degli storioni. In questi animali è per tutto una estrema dovizia di corpi cavernosi, che costituiscono una delle più caratteristiche proprietà del loro organismo. Il cuore è fornito di copiose appendici, che uguali alla milza nel colore, nella consistenza, ed in tutti i caratteri anatomici, formano prima un collare in-

torno alla sua base, poscia tre linee discendenti dalla base all'apice, e danno alla sua superficie esterna l'immagine d'una piramide triangolare. La insufflazione operata per entro all'orecchietta ed al ventricolo non lasciò scorgere comunicazione fra queste cavità e quei corpi spugnosi; molto meno la iniezione mediante le solite masse: forse perchè, essendo soggette all'influenza dei vasi coronarii, e della vena principalmente, la sua valvuletta impedisca l'entrata dell'aria e delle masse medesime. Aperto uno di quei corpetti, e soffiandovi aria, se ne ottiene un gonfiamento non dissimile da quello della milza esplorata con analoghi sperimenti; ma l'aria stessa non trapassa da uno negli altri, per ciò appunto che ciascuno ha, rispetto alle sue celle, una indipendenza certissima dal suo vicino. Eppure io ripetei quell'esame sovra esemplari che avevano la mole d'un cuore di bambino, e spettavano ad individui di un metro e mezzo di lunghezza. Tutto il canal digerente di questi animali, distinto per la grande densità delle pareti, (che giungono negli individui della detta misura a 5 buone linee nell'intestino, e quasi a 6 nello stomaco) mostra un tessuto polposo, il quale sfasciato dal coltello anatomico si risolve in uno strato densissimo di fibre muscolari intricate e robuste, intercettanti degli spazii interstiziali occupati da vasi, e circonferente alla più elegante mucosa. La quale per l'ordimento reticolare delle fibre carnose, imitante quello del cuore e dei vasi sottogiacenti, s'infossa in cellule ampie e concamerate (fig. 5. A), ripetendo in dimensioni assai gigantesche le glandule mucipare dell'umana mucosa uterina e vaginale. Il pancreas, che in nessun'altra specie zoologica si manifesta forse più chiaramente un'appendice introflessa del tubo alimentare, ci offre con poche modificazioni la medesima tessitura e la stessa qualità di prodotti viscosi e gelatiniformi, di cui tutta quella singolare mucosa è una sorgente quasi inesausta. Ma ciò che non può rivelare il coltello, rivela con una assoluta evidenza la prova delle iniezioni, cioè la struttura cavernosa di quell'apparato. Di dentro è una rete magliata elegantissima e condensata, che all'aspetto di grandi alveoli, dato dalle infinite glandule, aggiunge quello di alveoli microscopici formati dalle maglie dei vasi (fig. 5. B). Sotto a questo sta un fondamento di grosse vene ammagliate al modo pre-

ciso dei corpi cavernosi, colle identiche svolte e celle e diverticoli, proprii a quei tessuti nell'uomo (fig. 6.); il quale più rarefatto all'interno, più fitto di fuori, lascia trascorrere in mezzo le arteriuzze destinate a nutrire l'apparato muscoloso e muciparo, e riceve il sangue per mezzo dei fori capillari. Laonde guardato di fuori l'intestino presenta una maglia vascolare quadrigliata ch'è un carattere delle tele muscolose a due ordini di fascetti che si decussano nel loro tragitto. Finalmente perchè nulla manchi alla dimostrazione, le stesse pareti dei tronchi mesenterici si scorgono dotate del tessuto medesimo. Le vene mesenteriche scorrono in questi animali immedesimate col parete dell'intestino in quel suo tratto verticale, che rappresenterebbe il nostro intestino crasso. Poscia il canal digerente, fatta una grande curva, quasi di un cerchio completo, viensi sotto le condizioni d'intestino tenue a congiungere allo stomaco, abbracciando e riquadrando con essa il corpo glandulare del pancreas. Dal principio di quella curva fino al fegato i tronchi mesenterici si staccano dal parete intestinale, e decorrono isolati fino addentro alla sostanza del fegato stesso, componendo così colle confluenze de' rami pancreatici e gastrici, essi pure isolati, il tronco della vena porta. Nel principio di questo libero decorso la vena mesenterica trapassa per un corpo vascolare spugnoso, seguíto da altre frangie e lembi minori che costituiscono la milza. Ora che queste vene manifestino pareti crasse, polpose, simili alle intestinali, finchè all'intestino medesimo sono connaturate, potrebbesi derivarlo da questo, anzichè da organizzazione lor propria. Ma il crescere la densità di quel parete appunto colà dove sono libere, non attaccate neppure da falde o lamine membranose, dimostra che sì fatta struttura è ad esse congenita e necessaria. Pertanto quelle pareti nelle ben riuscite iniezioni si circondano d'una bellissima orditura vascolare, similissima a quella dei tessuti erettili e cavernosi (fig. 7. B). L'esterna rete rivela, per la forma delle sue maglie, la natura sierosa del velamento peritoneale del vaso. Fra questo e la tonaca interna, i vasellini capillari assumono le forme costanti dei plessi cavernosi più volte accennati (fig. 7. A), con la sola differenza di un minor diametro relativo alla forza e densità del parete. E tale loro apparenza è così uguale a quella dei corpi

splenici pei quali il tronco trapassa, che questi potrebbero dirsi efflorescenze e svolgimenti del tessuto intermedio del parete venoso. Aprendo il vaso per lungo, e guardatone col microscopio l'intima tonaca, la si ravvisa nelle vene non iniettate tutta seminata di pertugii, che sono orificii di infinite diramazioni; le quali, nei pezzi mediocremente iniettati, si vedono risolversi in cespuglietti che ricamano ad isole le tonache circonferenti; e dove l'iniezione fu piena, appaiono convertite nella detta tela plessiforme, che quei vasellini a cespuglio hanno compita colle infinite loro anastomosi. Dalle accennate dimostrazioni si trae una deduzione chiara ed incontrovertibile: che il sangue scorrente lungo il cavo del vaso, esce da alcune di quelle aperture, circola pei plessi delle pareti, e rientra per altre nell'alveo primitivo.

Ora volendo indagare le ragioni di questa interessante costruttura, per applicarle al nostro subbietto, io non saprei trovarne che due, cioè il bisogno d'una forza impellente, e la necessità di una elaborazione del sangue.

Rispetto alla prima non è chi non sappia che nei pesci la grande circolazione è del tutto estranea alla diretta influenza del cuore. Il sangue spinto dal cuore per l'arteria branchiale negli organi respiratorii, e di là per le radici delle arterie, costituenti gli archi aortici, all'aorta; da ultimo da questa alla cava, si trova in essa lontano dalla azione cardiaca per l'intermezzo di due sistemi capillari. Ed è tanto più degno di osservazione un tal fatto, quantochè l'aorta, fragile assai nella sua tessitura, spesse volte, come nello storione, nel luccio ecc., incanalata in apposita doccia delle vertebre, è perciò presumibilmente in condizioni assai sfavorevoli ad esercitare una energica azione sulla corrente sanguigna. Per la qual cosa la natura ha sopperito con altri modi a intrattenere la velocità della corrente, massime lungo le vene della grande circolazione: e la recente scoperta dei seni caudali venosi e pulsanti delle anguille ne farebbe testimonianza; come i cuori linfatici dei rettili la fanno rispetto al proprio sistema. Così io credo abbastanza dimostrato dal fatto anatomico, mediante questa particolare struttura delle pareti delle vene mesenteriche spettanti allo storione, esistere in quei vasi una forza

impellente, tanto più necessaria, quanto che al riflusso del sangue si aggiunge per esse una nuova distribuzione periferica, necessaria alla secrezione di abbondanti succhi biliari. Lo che, se fin ora vale rispetto agli storioni, potrà in appresso confermarsi coll'esame di altre famiglie di pesci.

Sul fondamento di queste circostanze anatomiche io credo molto probabile, che la vena ombelicale lungo il funicolo possegga, come nella struttura, così anche nelle funzioni molta analogia coi detti vasi venosi. Quantunque essa rispetto al cuore si trovi in quei rapporti medesimi che sono comuni a tutte le altre vene del feto, è nondimeno assai degna di osservazione la lunghezza del funicolo stesso, che obbliga le arterie ad una trasmissione molto lontana del sangue; poscia la loro distribuzione per un organo vasto com'è la placenta; e la terminazione dei loro surcoli in capillari tenuissimi, che si aggomitolano intorno ai fiocchi placentali sulle grosse celle venose che ne occupano il centro. Le quali circostanze congiunte ad un continuo anastomizzarsi delle vene periferiche, che secondo le diligenti osservazioni del Weber formano le stesse intrecciature, gli stessi diverticoli e saccoccie, che sono proprii ai corpi erettili e cavernosi, costituirebbero al certo una concorrenza notevole di cause ritardatrici della circolazione. Ed essendo per converso, almeno del termine della vita intra uterina, molto energica la virtù pulsante del funicolo, anzi direbbesi superiore alla portata delle due arterie per la quale, nell'atto della sua recisione, il vuotamento della vena suol farsi sempre con un getto impetuoso e lontano, è giustificata la idea d'una singolare e veramente grande tonicità delle sue pareti.

La seconda ragione, che accenna all'ufficio sanguificatore delle vene in quegli animali, si fonda singolarmente sulla mancanza d'un apparato linfatico. Imperciocchè è manifesto oggidì dalle belle osservazioni dell'Hewson e del Tiedemann, che la milza è un organo molto analogo alle glandule linfatiche del mesenterio, tanto anzi alle stesse corrispondente d'ufficii, che l'Huschke ardì considerarlo come il ganglio linfatico dello stomaco. La quale sentenza se pur si volesse tacciarla d'esagerazione, varrebbero a confermarne l'idea generale associata a

quell'organo, le sperienze del Meyer e dell'Hyrtl, recentemente fatte sui conigli col mezzo della sua estirpazione. In seguito alle quali si sono vedute le superiori glandule del mesenterio tumefatte e convertite in una massa spugnosa e cavernosa, colle apparenze tutte che alla milza sono pertinenti. Lo che conduce quasi spontaneamente alla giusta illazione, d'una grande concordanza negli ufficii di quelle due forme organiche per la quale tendono sempre a sostituirsi fra loro al comune scopo della assimilazione del sangue. Per la qual cosa se nell'uomo e negli animali superiori è pur molto abbondante la copia di questi corpi venosi, malgrado la esistenza dell'apparato linfatico, maggiore forse che all'aspetto generale non paia e meritevole anzi d'ulteriori illustrazioni, esso deve egualmente abbondare in quelle classi zoologiche ove son essi dopo l'organo respiratorio l'unico mezzo sanguificatore. Il perchè è spiegato come negli storioni, e così forse in tutti i pesci, sieno organi assorbenti ed elaboratori le tonache intestinali, ed oltre queste i corpi spugnosi inseriti a modo di milza lungo il tragitto delle vene refluenti dagl'intestini; e le stesse tonache delle vene medesime, e quelle perfino delle grosse vene spettanti alla grande circolazione come ho recentemente osservato nelle cave del *Zeus Faber* (*San Piero* volg.), organi questi, io diceva, assorbenti il succo alimentare, ed assimilatori del medesimo dentro lo stesso alveo sanguigno; perchè io non so che sieno state scoperte in quegli animali altre vie conduttrici del chilo nel torrente della circolazione, tranne le vene medesime. La qual verità conferma una legge proclamata ultimamente dal genio osservatore del Milne Edwards che si traduce così: *la degradazione dei tipi zoologici sostanzialmente dipende dall'accumulamento crescente delle funzioni diverse sovra un solo e medesimo organo.*

Ora la placenta, organo temporario del feto, l'ultimo forse che segni il parallelismo dell'essere umano cogli animali inferiori, durante gli stadii prodigiosi del suo sviluppo, è uno di quegli organi di cui appunto è questione. E quell'organo, essendo in relazione intima coi vasi uterini, non certamente per continuità di canale, com'è ormai provato da molti modi di esperienze, ma per sola contiguità di pa-

reti vascolari, non ha circoscritte le sue funzioni all'unico oggetto d'introdurre nel sangue del feto i soli principii, che più tardi e dopo l'uscita dall'utero gli entrano per la via dei polmoni. Perciocchè oltre alla deficienza della respirazione è combinata in quello anche la deficienza della digestione, altro, e più potente forse, atto sanguificatore. Onde i principii che dall'utero sono trasmessi all'embrione per la via della placenta, devono di necessità provvedere ad ambedue quelle fonti di vita e d'incremento; e questi principii comunque elaborati dalla madre, abbisognano sempre d'una speciale elaborazione dei vasi che più direttamente si aspettano al feto. E la struttura spugnosa della placenta, analoga affatto a quella della milza, è prova d'una analogia di funzioni sanguificatrici; le quali cessano allora soltanto che, per la completa formazione degli apparati digestivo e respiratorio, l'organo temporario si rende straniero all'organismo dell'individuo; rimanendo in lui attivi alla medesima foggia, quelli che in lui erano foggiati sul medesimo tipo; ma d'un'attività secondaria e come accessoria ai grandi apparecchi primarii. Ed io concepisco di leggieri come quella elaborazione del sangue nella placenta possa continuare lungo il funicolo fino al suo ingresso nel corpo del feto. Stantechè la natura che si approffitta d'ogni cosa, non avrebbe fatto quel lungo tralcio col solo intendimento di mantenere una semplice comunicazione lontana fra il feto e la placenta; come neppure volle che fra il testicolo e la vescichetta fosse un semplice condotto di trasmissione; ma lo torse ed avvoltolò in se medesimo alla sua origine; poi nel tratto finale ancora lo disseminò di diverticoli e celle, perchè in quel tragitto vieppiù si elaborasse lo sperma.

Per tutte queste considerazioni io sono indotto a concludere che la struttura da me annunziata del funicolo ombelicale, quantunque appoggiata a prove materiali, che non ottennero ancora ulteriore conferma, sia una realtà anatomica, la quale completa la storia d'un organo transitorio della vita umana, da cui essa principalmente deriva, e che nondimeno in questi ultimi anni soltanto fu soggetto di studii fruttuosi ed efficaci.

(Letta il 21 Febbraio 1847)

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

TAVOLA II.

Fig. 1. Fibre cellulari componenti la membrana amniotica del funicolo ombelicale del feto maturo (Diam. 197). La loro disposizione e natura è simile affatto a quella delle membrane sierose.

Fig. 2. La detta tonaca sierosa è attaccata con fila di pretta cellulosa (A) allo strato più tenace (B) che forma la trama del tessuto cavernoso del funicolo. Gli elementi anatomici di questo tessuto mi si presentarono analoghi alle tonache dei tessuti contrattili, che nel punto della eccisione rimangono succose, unite, senza tendenza a sfilarsi, ed elastiche sotto la compressione (Diam. 197).

Fig. 3. — Diametri 30 — Distribuzione periferica delle vene diramate nel tessuto cavernoso del funicolo. Presentano tronchi brevi, ritorti, frequentemente anastomizzati, con dilatazioni baccate ed intercettanti aree ristrettissime, essendo per converso cospicuo il lume del vaso. Questa forma è identica alla seguente.

Fig. 4. Corpo cavernoso dell'uretra umana maschile, iniettato e ingrandito a 30 diametri. In B si vuole rappresentare il detto tessuto spogliato della tonaca mucosa uretrale, della quale si veggono in A le tenui reticelle ammagliate al modo delle mucose.

Fig. 5. A. Aspetto della mucosa dell'intestino proprio ad uno storione lungo un metro e c. 20, ingrandita tre volte. (*a*) Seni mucosi approfondati nel tessuto cavernoso, e formanti concamerazioni minori, comunicanti fra loro, ed aperte in un ricettacolo comune, di cui la maglia superficiale è l'orificio. Nella sezione verticale del parete dell'intestino (*b*) si scorgono quei seni spaccati, il cui fondo si nasconde nello strato (*c*) delle fibre contrattili e carnose che rendono molto crassa la parte medesima.

Fig. 5. B. La medesima figura vista a Diam. 30 dopo l'iniezione dei vasi. L'apertura dei seni mucosi è limitata da creste prominenti, su cui i vasellini sanguigni s'ammagliano al modo stesso che nella membrana analoga del crasso intestino dell'uomo. Questa apparenza si ripete nel fondo delle cripte *a* rispetto ai minori scompartimenti. Qua e là si ravvisano rudimenti d'anse vascolose *b*.

Fig. 6. Plesso cavernoso del medesimo intestino, sottostante alla mucosa. I vasi di questo plesso molto grossi si scorgono ordinati al modo notato nelle fig. 3. e 4, e formano identiche anastomosi e saccoccie A. Sopra di questi si distribuisce una seconda tela di vasi minori che generano la rete capillare della mucosa B. Sono incerto se questi sieno più presto capillari

arteriosi, che si scarichino poi nelle vene sottoposte, come si osserva in tutti i corpi cavernosi (Diam. 30).

Fig. 7. Struttura vascolosa delle tonache proprie alle vene mesenteriche dello storione. Qui pure si scorge una distribuzione analoga al parete intestinale, dopochè vi si è detratto lo strato mucoso: = A rappresenta il plesso cavernoso della tonaca media della vena, ricoperto da sottili vasellini della sierosa interna, in qualche luogo venuti iniettati *a*, *a*: = B dimostra lo strato sieroso esterno che inviluppa il plesso cavernoso, e che appare analogo all'esterno indumento dello stesso intestino. Perciocchè le vene sono incanalate e connaturate quasi con questo nel tessuto proprio all'intestino, e se ne rendono indipendenti soltanto nella grande ansa che fa la sua porzione superiore, assumendo allora rapporti con produzioni spugnose somiglianti alla milza. Questa tela vascolare esterna è conforme ai plessi delle membrane sierose (Diam. 30).

Fig. 8. Tronchetto di una vena mediocre intestinale dello storione del diametro naturale di mill. 3, ingrandito 30 volte. I vasi di questo calibro hanno il plesso cavernoso poco sviluppato a paragone dei più grossi che vanno a comporre il tronco della porta, rappresentati nella fig 7. Aprendo uno di questi vasellini in cui la iniezione sia mediocremente riuscita, si scorge interamente una serie infinita di punti rossi che sono i confluenti di ramicelli destinati a somministrare le maglie vascolose della parete. Questi ramicelli formano dei piccioli cespugli A che sarebbero i capillari più grossi riempiuti dalla massa d'iniezione. Dove questa è andata più avanti si vedono quei cespugli fusi in una rete generale, specialmente visibile in B Il tronco della vena porta epatica presenta la stessa moltitudine di punti rossi: ed i cespugli vascolari vanno a comporre gli acinetti epatici, che stanno strettamente attaccati all'esterno parete del vaso

DELLA FORZA UMANA

DISCORSO

DEL DOTT. GIUSEPPE BIANCHETTI

I.

Quando il filosofo pronunzia questa parola di forza, sia che l'applichi ad una cosa sensibile o non sensibile, niuno gli domandi quel ch'egli intenda per forza: poichè de' modi e degli effetti di essa ei potrà bene talvolta discorrere; ma tanto gli è dato di definirla, quanto di conoscere la vera essenza delle cose sensibili o non sensibili, vale a dire, non gli è dato in alcuna guisa. E nulladimeno non può evitare di rappresentarsi ogni cosa qual una forza: mentre, dall'istante che questo concepimento gli sfuggisse per rispetto ad una cosa qualunque, la cosa medesima cesserebbe di esistere per lui. Quindi egli si rappresenta Dio come una forza, la forza suprema, l'universo come una forza, il pianeta che abitiamo come una forza, i monti, i vegetabili, le acque, gli animali come altrettante forze, ogni minuzia, ogni atomo, in breve, come una forza.

II.

Or l'uomo, del pari che tutte le cose, non è concepibile che come una forza. Ma nel solo uomo, fra tutte le cose, la forza si scorge operare in tre modi diversi, assumere tre diversi aspetti: tanto diversi,

che si potrebbero chiamare tre forze. Egli ha la forza del braccio, o sia la forza fisica; la forza del pensiero, o sia la forza della mente; la forza del sentimento, o vogliam dire la forza dell'animo. Di questi tre modi ne' quali si manifesta quella forza che costituisce l'essere umano, o, se così meglio aggrada, di queste tre forze che compongono ciascuno di quegli enti che diciamo uomini, niuna può stimarsi nè più utile, nè migliore, nè più necessaria dell'altra. L'uomo già egli stesso in parte materia, e tutto circondato dalla materia, ha mestieri di valersene incessantemente, e di superare non meno incessantemente gli ostacoli ch'essa medesima gli oppone: or come farebbelo senza quel modo della sua forza che si dispiega nel corpo? L'uomo innalzato al di sopra dell'istinto, in balía della sua propria direzione, bisognoso di procedere sempre colle regole ch'egli diede a se medesimo; in qual guisa lo potrebbe senza mettersi e continuare nel possesso di molte e svariate cognizioni? ed in qual guisa gli saria conceduto di mettersi in questo e continuarlo senza quel modo della sua forza che si dispiega nel pensiero? L'uomo, in fine, trovandosi in mezzo ad uno sterminato numero di forze della stessa natura della sua propria, e ad un numero ancora più sterminato d'altre di natura diversa, e però ad una moltitudine immensa di accidenti che gli si possono attraversare, che possono offenderlo in mille modi; l'uomo capace di gioia, e quindi per equo compenso di dolore; l'uomo capace di poter operare il bene, e quindi per equo compenso di commettere il male; come potrebbe aver il coraggio di prevenire od allontanar i dolori, come di vincerli, come di tollerarli almeno; come potrebbe aver quello di fuggire dall'ingiusto piacente per abbracciare il giusto disaggradevole, senza quel modo della sua forza che si dispiega nell'animo?

Ciascuno di questi modi, ripeto, non è meno utile, nè men necessario che l'altro; e però si trovano fino ad un certo grado tutti e tre in ogni uomo; poichè chi mancasse per intiero o dell'uno o dell'altro, già sarebbe al di sopra, o al di sotto dell'uomo stesso. E quegli nel quale ciascuno degli accennati modi fosse innalzato alla maggior elevatezza possibile, e tutti e tre si trovassero in un perfetto e costante accordo tra di loro, rappresenterebbe veramente il tipo della specie

umana. Ma questo tipo non è che nell'idea; idea così puramente speculativa, così superiore a quanto vediamo, che gli antichi sì dispostissimi com'erano ad ingrandire, ad esaltare la nostra natura, non ebbero ardimento di porla in effetto nè pur colla fantasia. Nella lunga schiera de' loro eroi, vale a dire di quelli che furono in parte ed in parte si figuravano tanto soprastanti a tutto il rimanente degli altri da destinarli all'onor degli altari, non ve ne ha alcuno che rappresentassero fortissimo ad un tempo in tutti e tre i modi della forza umana. Quanta forza di pensiero trovasi, per esempio, nell'immagine che han creata di Ercole o di Teseo? quanta d'animo in quella di Dedalo o di Orfeo?

A darsi il degno spettacolo di vedere sviluppata in tutta la sua interezza la forza umana è mestieri di osservarla in più uomini ad un tempo, e meglio ancora in uno di quegli aggregati che concepiamo pure come altrettante forze, ed alle quali imponemmo il nome di popoli o di nazioni. Poichè, siccome in queste, a costituire ciò che dà ad esse la vita e la forma, un modo della forza è specialmente richiesto ad una classe d'individui, e l'altro ad un'altra, ed il terzo ad un'altra ancora; così ciascuno di essi modi può agevolmente condursi alla più grande elevatezza possibile; e quindi, armonizzandosi in un giusto accordo fra di loro, portare la forza umana, considerata nel complesso di un popolo o di una nazione, portarla al sommo grado a cui può giungere. Ma quando la si consideri in un solo individuo, si trova che il procedere oltre all'usato, lo svilupparsi notabilmente di uno de' suoi modi pone, e dee por di necessità ostacolo al maggior procedimento di un altro. Quel soverchio di vigore che taluno si adopera di dare alla potenza od all'industria del corpo, cioè alla forza fisica, gli è mestieri di toglierlo a quella del pensiero; ed il maggior vigore che un altro cerca d'imprimere in questa non può essere che non lo impedisca nella fisica, ed anco più o meno in quella dell'animo. Evidentemente l'idea della forza umana al grado in cui la possiamo concepire, non può essere rappresentata per intiero da alcun uomo in particolare: e vada pure dove sa andar l'arroganza individuale, e gonfi pure quanto sa gonfiar sue vele l'adulazione, niun

uomo è stato, o sarà mai, o potrà mai essere l'esemplare della nostra specie.

III.

Il massimo numero degli uomini sono passati e passano via sopra la terra con tale un grado di forza sia nel corpo, sia nel pensiero, sia nell'animo, con tale un respettivo trovarsi tra questi tre modi della forza stessa, che non chiama, perchè non merita, alcuna attenzione; mentre, un poco più un poco meno, non è che il consueto a vedersi nella natura umana, e ciò che già si osserva costantemente negli accidenti della vita naturale e civile dell'uomo. Onde, pel massimo numero, non vi ha chi si prenda la briga d'investigare il quanto della forza, ed il come de' modi suoi. E se pure, in causa di particolari motivi, vi è chi 'l faccia in un caso o nell'altro, è tutto un affare individuale o di famiglia o di municipio; niuno degnerebbe tenerne registro; e ben tosto se ne dilegua ogni ricordanza. Ma quando in un uomo o l'uno o l'altro dei modi della forza si dispiega assai oltre all'ordinario, ecco tanti intesi ad osservare attentamente e il grado di essa, e in qual relazione si trovino in lui, con quel modo della forza che manifestasi sì elevato, gli altri due i quali non vi appariscono tanto: ecco alcuni che prendono in mano la penna, già apparecchiati a renderne perpetua la memoria.

Ciò avviene della forza del pensiero e di quella dell'animo considerate in tutti gli aspetti loro; ma della forza fisica particolarmente, anzi unicamente, quando si manifesti in istraordinaria guisa sotto l'una o l'altra di quelle sue svariate forme che diciamo industria, o pure anco talvolta sotto quella forma cui diamo il nome di bellezza. Poichè una tal forza, presa nel suo più rigoroso significato come forza meccanica e muscolare, sostenitrice di mirabili fatiche od offese materiali, operatrice di portentosi effetti nella materia, oggi non la si conosce quasi più di alcuna importanza che sia degna di nota negl'individui; non la si stima meritevole d'attenzione se non prendendola ad osservare in quegli aggregati di forze umane che diciamo nazioni. Ed

anco in queste, oh quanto diminuita, oh quanto svisata da quelle tante arti che abbiamo saputo trovare per iscemarle l'efficacia! Pindaro, se risorgesse, o dovria darsi altri motivi di canto, o dannare ad un quasi perpetuo silenzio la sua musa; perchè dove troverebbe ora que' soggetti ch'egli amava sopra tutto di cantare? Qual poeta, e fosse pur anco valente come Omero, e cantasse pur anco di guerre come Omero, qual poeta non si esporrebbe oggi a passare almeno per istrano se, come Omero, non disegnasse i suoi eroi che da una o più qualità distinte del loro corpo? Or moltissimi, non dubito, si ammirano che il più venerabile di tutti i libri, volendo abbassare la divinità alla nostra intelligenza, abbia prescelto di darcene un'idea col trarne sopra tutto i colori dalla forza fisica, e rappresentassela grande nelle forme, terribile negli sguardi, col braccio disteso, con la mano ferma e robusta. E certo ridiamo tutti, o quasi tutti, di quanto ci apparisce come una semplicità in quei popoli i quali, essendosi volti al cristianesimo, infrante od atterrate le immagini della lor prima religione, ricusarono di fare altrettanto per quella di Ercole; e non l'avrebbero fatto, ove non fosse stato lor detto, ed essi non avessero creduto che il nuovo culto darebbe loro da adorare un santo che valeva per sei Ercoli. Noi abbiamo degli Ercoli da teatro, o piuttosto li abbiamo avuti, poichè anche di queste sceniche rappresentazioni della forza muscolare ci siamo presto stancati, e n'è quasi passata la moda. Sarei là per dire che i nostri circhi sieno gli stabilimenti dei bagni, i nostri maestri in ginnastica i medici, i nostri direttori gli speziali, i nostri esercizii corporei i farmachi. In Ispagna rimangono tuttavia nell'amor della nazione certi spettacoli che rendono qualche immagine a quelli de' vecchi Romani. Ed ecco una turba di scrittori, intitolantisi *umanitarii*, che si sfiatano di gridare alla barbarie. Sarà barbarie; ma se quegli spettacoli induriscono, non corrompono. Io sono con chi diceva testè in Francia: Non v'ha amante di buon senno, il quale non preferisse cento volte di veder la sua donna ad assistere alle solennità del circo spagnuolo, piuttosto che a quelle commedie semiscioche, semioscene, dove le nostre gran dame vanno a perdere, non la pietà, ma il pudore e l'altezza dell'anima. Rese inutili tante opere dell'uomo nelle arti della guerra, una

tuttavia ce ne restava per anco d'intatta, la potenza d'indurare la fatica di pronte e lunghe marcie; potenza per cui tutti sappiamo quanto andassero lodatissime le soldatesche del magno guerriero. Ma or ecco che delle masse enormi di soldati potranno d'ora innanzi trascorrere da un estremo all'altro dell'Europa senza far uso di lor gambe, e più che abbastanza difesi dalle vicissitudini atmosferiche, dalle intemperie delle stagioni e dei climi. Io sono ben lungi, lungi assai, dall'idea di voler denigrare in alcun modo quel che si dice, ed è in fatto, progresso del secolo: accenno solo i motivi pei quali la forza fisica individuale nell'uomo è andata, e va ognor più, e deve andare scadendo da quel pregio in cui era tenuta, e doveva esserlo, dagli antichi.

Quand'essa si pieghi a svilupparsi in uno straordinario ingegno delle mani, l'ammiriamo, come dissi, grandemente tuttavia; e ne abbiam ben d'onde; perchè ai più facili a compiacersi come l'uomo valga oggi a provvedere a molti de' suoi bisogni, valga a soddisfare a molti de' suoi gusti con non altra fatica che quella di dare o regolare il moto agli agenti da lui artificiosamente disposti, affinchè producano un tale o tal altro effetto; a questi pure dee apparire molto chiara l'impossibilità che venga mai un giorno in cui l'opera della forza puramente meccanica possa sostituirsi in tante cose, e delle più importanti, a quella della forza umana, animata com'è dalla scintilla della vita, e diretta dall'esemplare dell'idea. E dall'altro canto, devono pur eglino ben conoscere quanti motivi rendano sommamente raro, e però sommamente pregevole il poter attuarsi della forza umana in uno straordinario ingegno delle mani.

Anche quand'essa si manifesti in quell'armonica disposizione del corpo cui diamo il nome di bellezza, anche allora certo andiamo compresi da non so qual sentimento misto di maraviglia e d'amore. Ma quanto diverso da quello degli antichi! quanto individuale! quanto povero! quanto meschino, quanto inefficace in confronto del loro ch'era sì palese, sì solenne, sì pubblico, sì nazionale, sì religioso! L'altare della forma umana è omai atterrato. Invano si provarono a commetterne qualche pietra in onore della bellezza femminile i cavalieri del mezzo tempo. Ogni popolo della moderna Europa si vergognerebbe

oggi di quei canti e di quelle storie di cui tanto compiacevansi i Greci, e che narravano i loro lunghi esilii, le continuate fatiche, le innumerevoli morti sostenute non per altro che per il possesso di una bella donna. Abbiamo torto? abbiamo ragione?... Io nol decido; e nè pur cerco d'investigare le cagioni di sì fatto mutamento, che tengono, come ben vedete, le loro radici in quelle del cambiato modo di civiltà.

IV.

Ma questa però non è sì trasformata, e già nè per potenza di speculazioni, nè per quella d'immagini o di credenze diverse, nè per quella di nuovi trovati si potrà trasformar mai cotanto che l'aspetto della forza fisica, se non osservata separatamente negl'individui, ne' quali, ripeto, è scaduta oggi quasi affatto di pregio, considerandola complessivamente ne' popoli, e quale i popoli possono ancora mostrarla, non tenga per anco nel giudizio de' savii l'alto grado che dee tener tra gli aspetti della forza umana. Tanto alto, che quantunque la forza del pensiero e quella dell'animo possano bene spiegarsi, e già siensi vedute spiegate non di rado in uomini che formavano parte di popoli non forti; nulladimeno, in un certo numero d'individui, e ad una certa energia non comparvero mai che tra' popoli forti. Vedete quanto povera di cuori generosi e d'intelletti potenti non divenga la storia della Grecia, che n'era pur sì ricca e traboccante, non divenga, io dico, da quel tempo che la Grecia andò sotto il giogo de' Romani! e quanto poscia non la troviamo sempre più povera, sempre più gretta e meschina! E quella de' Romani stessi che ci dà in elevatezza, in estensione, in potenza d'idee, che in nobiltà, che in vigore di sentimenti da quand'eglino furono costretti a riporre le fino allora invitte spade, ed a cedere alla maggior forza fisica dei popoli del settentrione? Chi voglia andar investigando le cagioni di questa corrispondenza tra la detta forza nei popoli e quella del pensiero e dell'animo negl'individui, avrà materia non meno alta che abbondante, e niente difficile ad essere agitata. Già Machiavelli, ne' suoi *Discorsi*, ha più volte detto e ripetuto, anzi ha fatto meglio che dirlo e ripeterlo, egli

ha provato che la buona milizia è il fondamento di tutti gli stati; e dove questa non sia, non possono essere, dic'egli, nè leggi buone, nè alcun'altra cosa buona.

Le lodi della pace sono in tutte le bocche, materia di versi, materia di prose; tema caro alle scuole e alle accademie; e degno di esser caro alle scuole e alle accademie non meno che a tutti gli uomini: poichè qual è che trovi difficoltà a fare, o non oda volentieri il panegirico di cosa che si presenta in sì leggiadro ed amabil modo, che produce tanti beni sì manifesti e presenti, com'è la pace; ed ancor più se pongasi a riscontro del suo contrario; dico di quell'altra cosa che si affaccia sotto forme sì brutte, sì paurose, tutta lacera le vesti, tutta lorda di sangue, che manda gridi sì tremendi, che cagiona sì orribili disastri, com'è la guerra? E bene: il filosofo che non tanto si lascia portar via dai casi di un individuo o di alcuni individui, di una famiglia o di alcune famiglie, di un paese o d'alcuni paesi, d'una provincia o di alcune provincie; non tanto, io dico, che non abbia la potenza di tenere sollevata la mente al complesso delle genti e dei popoli, per mettersi sotto gli occhi lo spettacolo dell'intero genere umano; il filosofo che può soverchiare il particolare per inoltrarsi nell'universale, la cronaca per andare nella storia, il vicino per correre nel lontano, il presente per retrocedere nel passato o per ispingersi nel futuro; il filosofo piange certo anch'egli sui mali particolari ed attuali degli uomini; loda anch'egli la pace, ma giustifica ad un tempo la guerra: nè solo la giustifica, ma ne prova la necessità; nè solo questa ne prova, ma i benefizii ne manifesta ed enumera. Le buone idee sono opera sì degl'intelletti, ma le utili istituzioni provenienti dalle buone idee non passano i mari ed i monti, non attraversano le lande ed i deserti, non si diffondono, in breve, largamente che per opera delle mani armate. Veneriamo, senza l'audacia di cercarne i motivi, o di farne de' commenti, veneriamo questo decreto che viene dall'alto, e la prova del quale è scritta in tutte quante le pagine di tutte le storie. Già ben sapete che una grande vittoria ha aperta la via ad ogni nuovo gran passo che desse la civiltà nel mondo: ben sapete, per esempio, che non furono nè parole nè libri i quali portassero la greca

in molte parti dell'Asia, o spargessero la latina per tante dell'Europa, ma ben la falange macedone e le legioni romane. Quello ch'è accaduto sotto i nostri occhi, niuno ha bisogno che io lo venga a dire: dirò sol questo, che si troverà forse d'accordo con tutti i savii chiunque congetturi che gli scritti degli Europei, nè le prediche de' missionarii potranno mai far uscire alcuni popoli dell'Asia da quello stagno, a così esprimermi, in cui giace immobile da sì lunghi secoli la scarsa e sì mal a proposito da tanti vantata loro civiltà, se prima non vada in mezzo di essi la forza fisica d'una nazione assai più di essi incivilita.

E poichè il discorso è tuttavia intorno alla parte fisica dell'uomo, aggiungiamo che a diffondere altresì una maggior perfezione di essa in un più gran numero d'individui, o piuttosto di popoli, la storia non può omai aver lasciato ignorare ad alcuno quel che importi la guerra e la conquista. Mercè di questa le razze forti vanno sostituendosi da per tutto alle deboli: l'organizzazione umana si conforma da per tutto a poco a poco sopra quella tanto migliore dell'europeo. Già ha cominciato a farlo, per esempio, nell'Algeria: già da molti e molti anni procede verso tal meta nell'Indostan: a Madras, a Calcutta vive una popolazione tutta anglo-indiana: già le pelli rosse spariscono in mezzo de' puritani: nella Nuova Galles del sud vansi formando delle colonie ibride che sembrano destinate a popolare tutte le isole di quello stretto. Come un'osservazione costante ci assicura che anche nel rimanente dell'animalità le razze piccole ed imperfette, i cavalli, per esempio, selvaggi dei Tartari, i cani-lupi delle foreste germaniche, dispariscono grado grado dalla faccia del globo, compenetrandosi, e in certa guisa rinascendo nelle razze energiche e superiori; e come vediamo altresì tra' vegetabili le belle specie coltivate ed ingrandite da noi, impossessarsi progressivamente di tutto lo spazio, e andar ogni di più concentrando nel loro seno le selvaggie e primitive; così di mano in mano che i forti portano il piede e stanziano su d'una o d'altra parte del globo, essi vanno innalzando al loro il tipo inferiore che ivi ritrovano della specie umana.

La forza fisica dunque dell'uomo occupa un grado eminente nel-

l'umanità: lo occupa come operatrice sopra la natura: lo occupa come operatrice sopra i destini, e le forme stesse dell'umanità medesima.

V.

Io dissi, ch'essa, questa forza, non ha e non può avere molta importanza, oggi specialmente, se non qualora si prenda a considerarla attuata da una unione più o men grande d'individui; ch'essa quindi non ne ha alcuna o quasi alcuna considerandola negli individui stessi. Nè mi disdico. È ben chiaro per altro che ad esser posta in atto da una unione d'uomini, è necessario che ciascuno vi metta la sua parte. Ma della parte di ciascuno non facciamo molto conto, perchè guardata soltanto in se medesima non la reputiamo, ed infatti non si può reputarla capace di operare qualche notabile effetto. A differenza della forza del pensiero e di quella dell'animo, ciascuna delle quali quando oltrepassi, anche in un solo individuo, i termini comuni, si procaccia la stima degli uomini; perchè gli uomini sanno ch'esse, così pure individuate, valgono a farsi produttrici di tali frutti che meritino la riconoscenza, l'amore e la maraviglia universale. Dico individuate; e quanto più se si consideri ciascuna di esse congiunta ad altre forze della sua stessa natura in quelle aggregazioni d'individui che chiamiamo popoli!

La forza fisica, l'abbiamo veduto, vale certo ad introdurre in un popolo una forza grande di pensiero e d'animo. Potrei anzi aggiungere che tanto meglio vale quanto maggiormente si trova posta in atto; poichè certo le più magnanime azioni si compierono, le più alte ed estese idee si svilupparono, le più grandi, le più utili scoperte si fecero tra tutti i popoli appunto quand'era presso di loro nella sua maggior agitazione questa forza medesima. E ne parli pur diversamente chi vuole; io me gli arrenderò quand'ei sarà giunto a cancellare dalla memoria degli uomini i tempi d'Alessandro, di Cesare, di Carlo, di Luigi, di Federico e quelli di Napoleone. Ma a me or giova di accennare che, viceversa, la forza del pensiero, almeno quanta ne oc-

corra, e soprattutto quella, quella soprattutto dell'animo vale a mantenere, ad accrescere, a regolare in un popolo, a rimettere la sua forza fisica. Nel qual proposito, niuno qui certo ha bisogno che si ricordi come di forza d'animo essendo divenuti poverissimi i popoli della Grecia, non poterono contro la forza fisica de' Romani niente di ciò che aveano potuto tante volte contro quella degli Asiatici; e furono in questo assai inferiori a' Sanniti, tanto più scarsi di loro in numero, tanto meno abituati in guerra. E la forza fisica stessa de' Romani, che sarebbe divenuta dopo la sconfitta di Canne, se non fosse stata prestamente rimessa da quella loro immensa forza d'animo? da quella forza, io dico, per la quale i poderi vicini a Roma, sopra cui i Cartaginesi avevano già piantati i loro alloggiamenti, messi in quel tempo stesso in vendita, niente perderono del loro prezzo. E dove, Signori, dove in altro che in questa forza medesima i Greci moderni trovarono il modo di riaver tanto vigore nel braccio quanto bastasse a riguadagnar la terra che calcano, e a salutar nuovamente per proprio il sole dell'Attica?

Della forza del pensiero, considerata generalmente nel corso dei secoli e dei popoli, noterò sol questo, ch'essa porta con sè molto chiara l'immagine del tempo e della nazione. Il pensiero sino ad un certo grado non ha altra impronta che quella dell'umanità; ma oltre a questo grado, cioè quando diviene una forza straordinaria, acquista un tal modo, un tal atto, tanto s'incorpora delle condizioni de' luoghi e dei tempi, che può bastare da se solo a far conoscere quando ci sia venuto, e d'onde ci venga. Togliamo pure le date; quanto non sono distinti i grandi pensieri antichi da quelli dei mezzi tempi, e quanto questi da quelli de' moderni! Sopprimiamo pure la differenza delle lingue; chi confonderebbe un pensiero orientale con un greco, od un greco con un romano? E la forza del pensiero ne' Tedeschi chi or la potria scambiare con quella de' Francesi, e quella de' Francesi con quella degl' Italiani? i quali forse più ch'altri devono consolarsi assai che una certa nazionalità provenga anche dalla forza del pensiero.

VI.

Ma poichè questa e la forza non meno dell'animo possono dare molta e degna materia di discorso, quando pur si considerino singolarmente negl'individui, come quelle che sono l'una e l'altra, anche operando come forze individuali, di tanta efficacia, onde farsi meritevoli d'altissima stima; e poichè il parlarne guardandole così, è tanto meno difficile, e può essere forse tanto più sicuro ed utile, soffermiamoci qui ora a riguardarle unicamente in sì fatta guisa.

E prima di tutto mi piace che le osserviamo un istante trovantisi ambedue congiunte in un solo uomo; e prima ancora non pure congiunte in un solo uomo, ma l'una e l'altra immedesimate per guisa che cospirino ambedue allo stesso identico fine. Del che ne diedero esempio quegli uomini rarissimi, è vero, ma non tanto che non abbia motivo d'onorarsi d'alcuno, quasi ad ogni generazione, la specie umana; quegli uomini ne' quali una grande idea non avrebbe mai potuto giungere alla sua maggior potenza, o la potenza di una grande idea non avrebbe mai potuto effettuarsi senza l'opera egualmente e più vigorosa e contemporanea del loro proprio sentimento. Vedete: ecco un giovane, sin l'altro dì poco noto, ora famoso, e la cui fama durerà, senza iperbole, quanto gli astri. Egli pensa che i movimenti irregolari d'Urano sieno cagionati dall'azione di un pianeta sconosciuto che si aggiri ad una immensa distanza da esso. Questa forza speculativa del pensiero non gli era veramente tutta sua propria; essa gli venne in gran parte dal progresso della scienza. Fu tutta sua propria l'abilità di sottoporla ad un incessante esperimento difficilissimo di calcolo, e specialmente fu tutta sua propria la forza d'animo, onde perseverò per anni ed anni ad affaticarsi in calcoli di una spaventosa lunghezza, e con appena la probabilità dell'effetto: il qual poi gli riuscì, come niuno ignora, tanto solenne e sicuro, che potè scrivere a Berlino: Guardate nel tal punto dello spazio, ad un tale istante; vi dev'essere un pianeta; cercatelo, lo troverete; annunziatelo al mondo. Ma io confesso che ammiro per questo di che ragiono, sopra quanti ne ricordi o innanzi o dopo di lui la storia, io am-

miro Cristoforo Colombo. Poichè lasciando da parte l'importanza effettiva della sua scoperta, di cui sarebbe più che soverchio a parlare, trasportiamoci al suo tempo, ed immaginiamo qual forza di pensiero debba essere stata in lui per portarlo al suo alto concepimento; qual forza di pensiero per tenervelo saldo nullaostante le opposizioni di molti fra' meglio pensanti del suo secolo. E nulladimeno, a questa forza grandissima si può trovare chi ne scemi tanto o quanto la lode, ricordando que' lampi che balenarono nella mente di alcuni altri, e nel suo tempo stesso e negli anteriori. Ma le uniche e più profonde radici della sua forza d'animo, chi le vorrà cercare, e volendo, chi potrebbe trovarle altrove fuorchè nell'intimo del cuor suo? Mirabil uomo il Colombo quando pensava; più mirabile assai, a senso mio, quando, sulla fede del suo proprio pensiero, ci leva l'ancora, lascia i lidi dell'Andalusia, e si abbandona al mare. E poichè abbiam qui messi vicini questi due nomi, notiamo passando cosa già notata tante volte, ma notevole pur sempre, dico la differenza de' tempi o de' luoghi o della fortuna. Le Verrier ritorna dal suo viaggio di calcoli, dopo la scoperta dell'astro con onori, con pensioni, con la statua; Colombo ritorna dal terzo suo viaggio dell'Oceano, dopo la scoperta di un altro mondo, con le catene ai piedi.

Non tanto immedesimate, ma ben corrispondentisi l'una all'altra si scorgono queste due forze, delle quali parliamo, in quegli uomini, onore anch'essi grandissimo del genere umano, i quali congetturando a che pericoli si esponessero, o piuttosto sapendo a che mali andassero incontro se lasciavansi portare in certe materie alla forza del loro pensiero, nulladimeno vi si diedero abbandonatamente in preda, già apparecchiati a contrastare a' pericoli, a sopportare i mali con una potente forza d'animo. Io sopra tutto mi compiaccio ed in me stesso esulto quando la storia mi fa incontrare in quegli uomini che mostrarono queste due forze nell'atto che si sostengono scambievolmente e s'invigoriscono. Certo è meno difficile di trovare che la forza dell'animo sia venuta in aiuto di quella del pensiero; ma non è poi tanto rarissimo d'imbattersi anche in qualche caso in cui la forza del pensiero si facesse a soccorrere quella stessa dell'animo. Del che gli an-

tichi n' ebbero un solenne esempio o piuttosto un tipo in Socrate, quando innalzava la sua mente e la teneva fra più alti argomenti che gli provassero una vita durabile, e il mantenessero saldo contro all' istinto della natura che pur dovea sospingerlo a dolersi a cagione di quella che stava là là per perdere. E gli uomini del mezzo tempo lo poterono vedere con altrettanto di maraviglia in Severino Boezio, che dall' intelletto tutto volto a filosofici ragionamenti, trasse più forse di quanto gli occorreva a sostenere animosamente il lungo carcere, e non meno la minaccia continua di quella tragica morte che in fine gli diedero. E i nostri padri, oh, qual esempio di questo non ebbero anche i nostri padri! Intendo in Lavoisier che instava di prolungare l' agonia, per avere un poco di più tempo a rimanersi tra la scienza. Ma che dico io di prolungare l'agonia, s'ei già non la sentiva tutto compreso com'era dalla gioia del pensiero!... Oh queste due forze, quando si trovino straordinariamente sviluppate e congiunte in un solo uomo, in qualunque guisa vi si trovino, con qual si voglia corrispondenza tra di esse si stieno, per qual si voglia motivo operino, lo rendono ben degno dell'universale ammirazione e venerazione!

VII.

E certo devono renderlo, o Signori, se una sola può bastare; e già vediamo che basta a produr molto di questo effetto. Lo produce in ispecialità, e deve produrlo la forza dell'animo; poichè un uomo, benchè non mostri niente di straordinario in quella del pensiero, quando manifesti una potenza grande in questa dell'animo, ed abbia occasione di attuarla in condizioni più o meno importanti e solenni, già dà di sè uno spettacolo, non solo degno, ma che gli uomini reputano in certa guisa compiuto. Per contrario, chi dispiega una forza grande nel pensiero, ma non può farne vedere una di corrispondente nell'animo, e più se di questa è in difetto; egli eccita certo la maraviglia come sempre una forza che superi l'ordinario; ma è inevitabile agli uomini di scorgere nella sua natura un non so che di manchevole, una cosa che porta con sè una certa imperfezione; e quindi è loro inevitabile

di non poter restare appieno appagati, di dover rimanere con desiderio. Che desideriamo leggendo le vite di Aristide, di Temistocle, degli Scipioni, di Catone, di altri uomini di simil tempera, venendo in giù fino a quelle del Washington e del De Paoli? Ma non senza qualche desiderio può rimanere l'uomo di forti e nobili sentimenti, quando si faccia a leggere le vite di Aristotile, di Platone, di Livio, di Virgilio, di molti altri tali, venendo in giù sino a quelle del Linneo, del Vico, del Monti. Nè alcuno vorrà uscire in biasimi verso di questi, se consideri che una potente manifestazione nella forza del pensiero dev'essere d'impedimento grande ad un vigoroso dispiegarsi in quella dell'animo. Dev'esserlo, perchè la prima vive e però si alimenta in un mondo ch'è per lo più diverso dal mondo in cui vive e si alimenta la seconda. La prima sta sopra tutto nel mondo delle idee; la seconda in quello delle azioni: la prima è costretta quasi sempre a dilungarsi come più può da tutte le cose che ci stanno d'intorno; per contrario, la seconda dee invece rimaner quasi sempre, come più l'è conceduto, tra di esse. Or, le forze umane sono bene un dono di Dio, ma in sola la potenza: il metterle in atto è unicamente opera dell'esercizio. E però il tempo che s'impiega ad esercitare la forza del pensiero è ben necessario che di frequente lo si tolga all'esercizio di quella dell'animo, se l'una si trova in luogo ch'è spesso tanto diverso da quello in cui sta l'altra, e se l'una e l'altra si addrizzano ad intendimenti che spesso non hanno niente di comune.

Vedete, Signori, che io giustifico, o piuttosto scuso di buon grado l'uomo in cui la forza dell'animo non corrisponda a quella grande del pensiero: ma non vorrei che queste giustificazioni, o meglio queste scuse, non dico già da voi, ma da altri si estendessero per avventura oltre al debito, nè in quanto agli uomini, nè in quanto alla cosa. Non in quanto agli uomini, perchè il mio discorso è bene applicabile a quelli ne' quali la forza del pensiero sia proceduta e continui in un grado eminente, e però si eserciti in certa guisa al di sopra del corso delle vicende umane; ma non già a niuno di que' tanti in cui non oltrepassi il consueto alla generalità degli uomini che si occupano negli studii. Non in quanto alla cosa, perchè si può bene

scusare la mancanza della forza dell'animo; ma non il suo opposto; si può scusare la debolezza, ma non mai la viltà. Scuso Tullio, ma non Sallustio; il Moro, ma non Bacone; il Tasso, ma non il Guicciardino. Anzi sono tanto lungi dall'intendere a questo, che confesserò liberamente, che il vedere un uomo il qual più o meno si solleva sopra l'universale per la potenza delle idee o delle immagini o per l'espressione di elevati sentimenti, e che in pari tempo si trova nello stesso fango di molti, e a molti più sta sotto quando ponga in atto idee, immagini o sentimenti per conto suo proprio ne' casi della vita, come quegli che si aggira volentieri ne' cortigianeschi labirinti, che niente si spaventa di usare le simulazioni o le dissimulazioni, che va in traccia da per tutto di chi il protegga o il lodi, che vuol far largo in ogni guisa al suo merito, che intende a far acquisto per ogni modo o di danaro o di onori o di gradi, non si vergognando di mettersi per ciò in qual si voglia strada, e di scendere per anco in giù in giù sino agl' intrighi femminili; confesserò liberamente, io dico, che il vedere un tal uomo sì commendevole per la forza del pensiero, e sì biasimevole, non già pel difetto in quella dell'animo, ma pel suo contrario, mi è di tanto brutto, di tanto intollerabile spettacolo, che non solo il fuggo cogli occhi, ma volentieri altresì colla penna.

VIII.

Che se da esso fuggendo, or volessimo, Signori, discorrere alquanto i motivi, la natura, gli effetti di queste due forze, considerandole indipendentemente da ogni relazione dell'una verso dell'altra, osservando ciascuna di esse in se medesima, ed entrando in tutti i particolari degli svariatissimi aspetti co' quali ciascuna di esse può manifestarsi; già avremmo un'ampia materia da occupare non poche faccie, ma degli intieri volumi. Poichè, siccome la forza umana si dispiega in que' tre modi di cui abbiamo sino ad ora fatto qualche cenno generalissimo; così ciascuno di essi modi può dispiegarsi sotto varie forme. Vedemmo la forza fisica assumerne tre di molto diverse. E quante non ne può ricevere quella dell'animo! Eccovi, per esempio, il coraggio che

va incontro ai pericoli e li affronta: eccovi la rassegnazione che sopporta senza querele i mali: eccovi il decoro che non dà nè pur vista d'accorgersi delle trascuranze o delle ingiuste preferenze: eccovi la costanza che per andare ad un nobile intendimento indura volentieri le lunghe fatiche, e quasi non si avvede del tempo. Saria colpa se non ricordassimo anche quell'aspetto in cui è assai più difficile che in ogni altro il manifestarsi di questa forza. E certo bisogna che sia difficile, difficile molto, poichè chi legga le storie o giri intorno gli occhi, troverà un numero non piccolo d'uomini forti in varie guise nell'avversa fortuna: ma quanti pochi nella buona! Molti seppero o sanno tollerare vigorosamente il peso della povertà, delle dimenticanze, dei disprezzi, anco degl'insulti, delle carceri, degli esilii e s'altro v'ha di peggio; ma rari, rarissimi furono e sono quelli che potessero o possano sopportare da forti il peso della ricchezza o della potenza o della gloria. Napoleone che dispiegò una sì grandissima forza d'animo, di cui ne diede prove tanto svariate e straordinarie ne' primi anni della sua vita, e tante più, benchè in genere diverso, negli ultimi, non resse nè pur egli a questo peso. Le condizioni dell'uomo rendono quasi unico il suo esempio, lo so; ma voi sapete altrettanto che se ne potrebbero citare più che molti e molti in tutte.

Non è poi bisogno dirvi, se voi stessi ne date qui a voi medesimi un sì bell'esempio; non è bisogno dirvi, o Signori, che la forza del pensiero si mostra pur essa sotto moltiplici aspetti assai diversi tra di loro. Vi è la forza che persiste, vi è quella che si slancia: vi è la forza investigatrice degli esseri sensibili, vi è quella che li trapassa e si esercita nelle astrazioni. L'una è potente sopra le cose, l'altra sopra gli uomini; e questa s'interna nelle idee e negli affetti altrui per condurli alla guisa di Nestore, od a quella d'Ulisse, alla guisa degli oratori, o a quella dei diplomatici. Vi è la forza che rimane volentieri tra le realtà per indagarne gli accidenti, scoprirne le leggi ed ascendere ai principii: essa è quella che si allarga ad operare nelle svariatissime parti dell'ampio campo filosofico. Vi è la forza che delle realtà non si vale che come d'altrettanti materiali per crearsi un mondo in cui li disponga ed architetti a suo grado, ed in cui possa attuarsi,

secondo che più le piace, dal breve passo dell'epigramma al lungo viaggio del poema. Vi è la forza che ricorda, vi è quella che ragiona; vi è la forza che si distende fuori di se medesima, vi è quella che tutta in se stessa si rivolge e concentra.... Ma se a discorrere le moltiplici forme sotto alle quali può manifestarsi la forza del pensiero e quella pur dell'animo, sarebbe materia, come dissi, di volumi, non può essere nè pure tanto breve quella di solo enumerarle.

IX.

Giova però che l'abbiamo toccata, perchè risalendo ora alla generalità dell'argomento ci vale a non chiuderlo senza considerar prima un istante, un solo istante, come la forza umana si sviluppi, si mantenga, si accresca, s'invigorisca. Essa il fa, Signori, alla guisa stessa che già il fanno tutte quante le forze che conosciamo, cioè mediante i contrasti. Togliete questi, e la forza umana è per intiero distrutta. Or i contrasti le vengono in parte dal di fuori; perchè certo la natura, ed anco ciò che chiamiamo la fortuna, la qual non è infine se non la natura stessa operatrice per cause ignote, muovono una guerra continua all'umanità, ch'è tanto nuova quanto è peregrina su questo globo; ed è ben mestieri ch'essa eserciti la sua forza se vuol resistere, se vuol durare, se vuol vincere. Onde in molte di quelle cose sopra le quali il massimo numero degli uomini piange come sopra disgrazie, o se ne lamenta come d'impedimenti, o se ne querela come di mali, il vero filosofo vede e benedice invece la mano della Provvidenza che volle sollevata con l'opera loro sì alta la dignità, e tenere in sì eminente grado la potenza della nostra specie in mezzo a tutta quanta la creazione.

Ma altri contrasti, e non minori, la forza umana trova nell'intimo di se medesima. I tre modi principali in cui abbiam veduto ch'essa può dispiegarsi non cessarono nè cesseranno mai di avere più o meno vive dissensioni tra loro. Vedete, per esempio, quante volte ed in quante guise il modo fisico non ha cercato di comprimere, di abbattere, di annullare quello della mente! E bene; questo si rialzò sem-

pre più vigoroso dalla lotta; nè si può credere, ed io non credo certo, possibile che si fosse mai sollevato a tanto vigore a quanto il vediamo, se non avesse avuto da sostenere la lotta. Mi piace, senza dubbio, che gli scrittori, e gli storici specialmente, narrino appuntino i fatti; è il loro ufficio. Mi piace che versino qualche lagrima sopra i martiri del pensiero: chi potrebbe loro negarla? Ma non possono piacermi quando se n'escono, come fanno tanto di spesso, in certe declamazioni. Non possono piacermi, perchè guardano a' particolari, e non badano all'universale; si fermano agli uomini, e trascurano l'umanità; hanno dinanzi agli occhi, poniamo, un Socrate, un Bruno, un Campanella, un Galileo, un Giannone, ed altri tali degnissimi individui; ma non considerano quanto i casi loro fossero opportuni, per non dire necessarii, a far entrare quel modo della forza umana che si manifesta nella mente, a farlo entrare in quella nobile ostinazione d'onde traesse poscia l'impulso maggiore al suo maggior progresso.

Nè solo tra i diversi modi della forza umana avvengono i contrasti de' quali parliamo, ma già si sono veduti, e si vedono pur anco continui tra i varii aspetti o le varie forme di un modo medesimo. Ciascuna di esse è in un'incessante agitazione per andar del pari alle altre o soverchiarle; e da queste perpetue agitazioni di ciascuna forma n'esce il maggior vigore di tutto quel modo sotto del quale stanno comprese. Vedete, per esempio, ancora la forza del pensiero! Avreb-b'essa mai potuto allargarsi a tant'ampiezza di dominio, giungere a tanta energia di potenza in tutto il suo dominio senza le gare che avvennero e che procedettero spesso in battaglie combattute tra i varii aspetti sotto i quali le è conceduto di manifestarsi? Certo la storia ci dà ogni motivo per non crederlo; perchè la storia non mostra mai un processo degno di nota in una forma del pensiero medesimo, che già non ne mostri fatto in pari tempo uno di eguale e forse maggiore da quella che le fa riscontro, e che talvolta ha la sembianza di esserle opposta. I grandi uomini, in ogni aspetto sotto il quale può dispiegarsi questa forza, apparirono sempre contemporanei. I retori ci parlarono e ci parlano ancora di condizioni, di luoghi e di tempi; ci parlarono e ci parlano sopra tutto di mecenati: la via è larga, po-

trebbe condurre talvolta a' gradi, agli onori; lasciamoveli andare. Ma il filosofo, se non disprezza la potenza di niuna di tali cose, la causa vera ed intrinseca del fatto a cui accenniamo la vede unicamente dov'è, cioè nell'agitato contrasto delle varie forme del pensiero; come vede nell'agitato contrasto di quelle del corpo il più grande svolgimento della forza fisica, particolarmente quando si manifesti nei varii aspetti dell'industria; e come vede altresì nell'agitato contrasto di quelle che possono assumere i nobili ed elevati sentimenti il progresso maggiore della forza dell'animo. È già osservazione di Tacito che le grandi virtù sono sempre contemporanee in un popolo anch'esse; e che ivi più abbondano dove più si apprezzano, e più si apprezzano dove più abbondano. Or la virtù, come il suo nome stesso significa, non è che la forza, la forza dell'animo.

X.

Tutto ciò che compone l'universo è in un perpetuo contrasto; e questa grande armonia che vediamo non esce che dai contrasti; e però non si adagia nè riposa in alcuna parte, ma vien fuori da tutto il complesso delle cose, dalla più minima alla più grande. Così la forza umana non nasce anch'essa, non si mantiene, non si accresce che per opera dei contrasti. Onde il filosofo che vuol darsi il degno spettacolo di contemplarla nella grandezza de' suoi effetti, non la cerca negl'individui, ma nell'umanità; non in questo od in quell'argomento, ma in tutte le materie; non nell'uno o nell'altro luogo, nell'uno o nell'altro tempo, ma nell'estensione degli spazii e nella successione dei tempi, cioè nello studio di tutta quanta la storia.

Del quale studio l'intelletto di qualunque uomo potrebbe contentarsi in sì fatto proposito, tanto è vasto, tanto è utile, tanto è mirabile. Ma l'intelletto dell'uomo è dominato da una curiosità ancor più forte. Esso fa prova di retrocedere indietro indietro nel passato fin là quando non erano cominciati per ancò i tempi, fin là quando era ben lungi però ancora l'apparir della storia. Esso vorrebbe conoscere la primissima origine della forza umana; la sua primissima comparsa tra le forze

del globo; poichè una tal forza sembra evidentemente un complesso di quelle che esistevano innanzi di lei: esso vorrebbe inoltre conoscere tutto il procedere del suo svilupparsi di grado in grado fino a quel punto in cui si trova da quando ne abbiamo memoria. E quasi il passato anteriore ai tempi, anteriore alle storie fosse per lui un'investigazione di leggero peso, o se ne fosse di già impadronito, ei si slancia altresì con mirabile coraggio nell'avvenire, e presagendo i futuri progressi della forza umana in tutti e tre i suoi aspetti, si adopera a trovare e ad indicare i modi ond'essa monti sempre più in su per quella linea che presuppone apertaci a spira dinanzi, ed a cui diede il nome di perfettibilità indefinita.

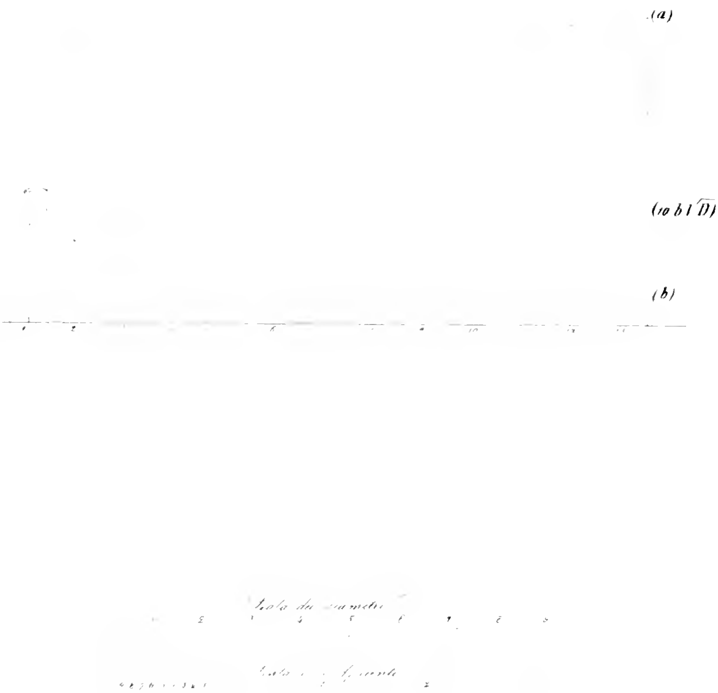
Queste due ricerche che trascurano il presente, o che del presente non si valgono se non per volgersi l'una di esse al passato e l'altra al futuro; queste due ricerche, coll'immenso numero delle accessorie, già ben più di me lo sapete, occupano un larghissimo spazio in quegli esercizii che diciamo scienze. Con quale o quanto effetto lo occupino o sieno mai per occuparlo, io nol so. Ma questo so bene che, anche senza o con poco effetto, furono come sono e saranno pur sempre fatiche degnissime di quelle menti che tanto più deggiono reputarsi elevate, quanto più nel solo atto di andare in traccia del vero spendono il maggior vigore della loro vita, sentono la gioia massima della loro esistenza. Lessing diceva, che se Dio tenesse in una mano una verità, e nell'altra la potenza di cercarla, e mettesse in suo arbitrio di pregarlo a concedergli o la verità, o la potenza di cercarla, saria di quest'ultima ch'ei lo pregherebbe. Signori! Io sono con Lessing.

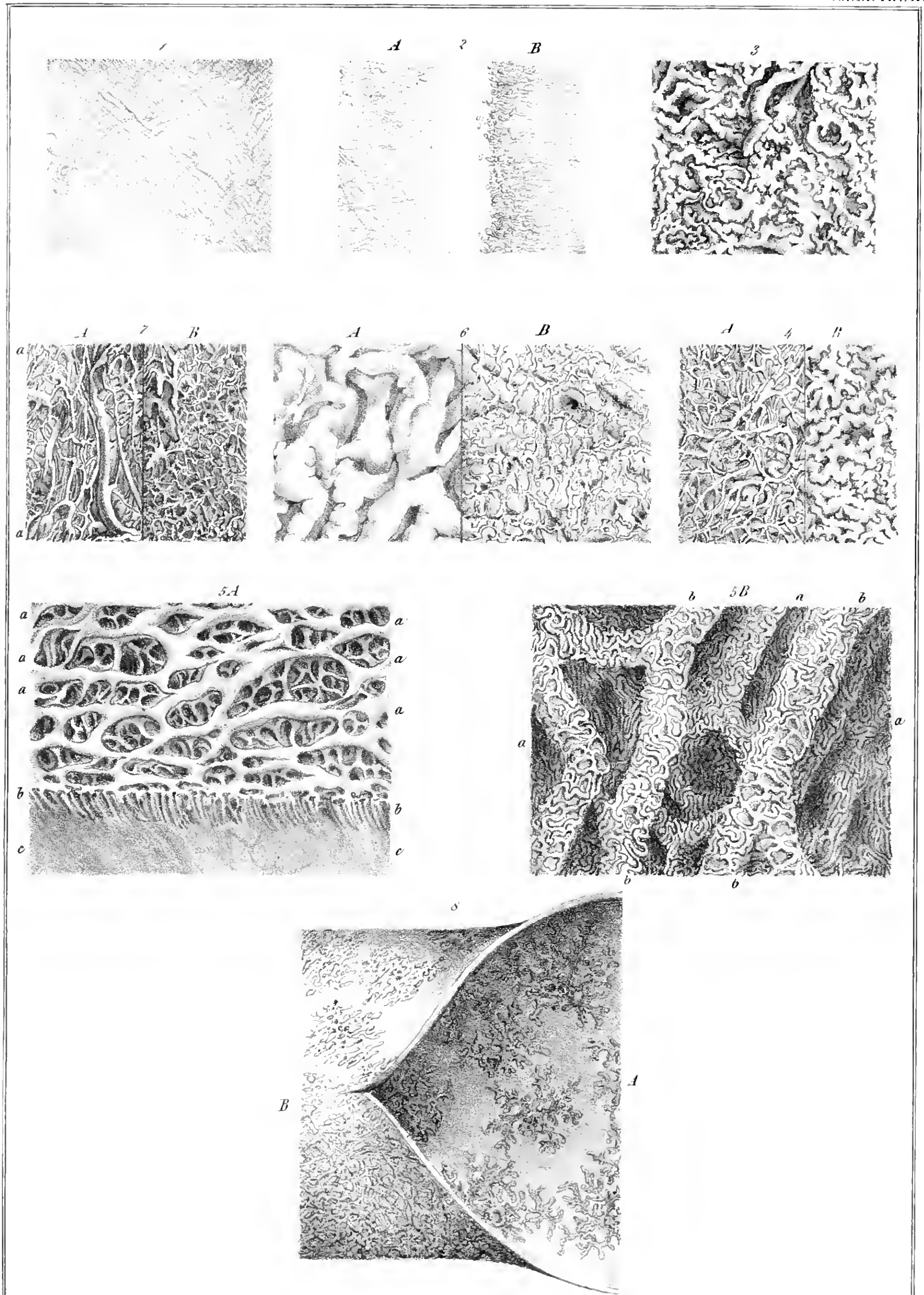
(*Letto il 29 Novembre 1846*)

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO VOLUME

Rappresentazione grafica
dei coefficienti idrometrici per tubi





G. Agostini dis.

Venezia Pr. Lit. Kier

TIPOGRAFIA DEL SEMINARIO

DI

PADOVA

1847